AGLA 1

Gruppen

- Def Gruppe: $(G, \circ)$
  - Neutrales Element: $\exists e \in G \forall g \in G : eg = g$
  - Inverses Element: $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g^{-1} g = e$
  - $\circ$ ist assoziativ: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
- abelsche Gruppe: Gruppe, bei der $\circ$ kommutativ ist
- Satz: Das neutrale Element und das inverse Element ist eindeutig.
- Permutationsgruppe: $(S(M), \circ)$, mit $S(M)$ die Menge aller bijektiven Funktion $\sigma : M \to M$ und $\circ$ die Verkettung von Funktionen $(\sigma \circ \rho)(x) = \sigma(\rho(x))$
  - Man schreibt auch $S(\{1, ..., n\}) = S_n$.
- Ordnung einer Gruppe: $|G|$
- Gruppenwirkung/-operation: $G \times M \to M, (g, m) \mapsto gm$ mit:
  - Neutrales Element hat keine Wirkung: $\forall x \in M : ex = x$
  - Assoziativität: $\forall g_1, g_2 \in G, m \in M : (g_1 g_2) m = g_1 (g_2 m)$
- Bahn/Orbit von m: $Gm = \{gm \mid g \in G\}$
- Satz: Eine Gruppenoperation definiert auf M eine Äquivalenzrelation durch $m_1 \sim m_2 \Longleftrightarrow \exists g \in G : g m_1 = m_2$
- Untergruppe: $H \subset G$ heißt Untergruppe von G, falls $(H, +)$ auch eine Gruppe ist.
  - $\{e\}$ und G sind die trivialen Untergruppen.
- erzeugte Gruppe: Sei $\Gamma \subset G$. Dann heißt der Durchschnitt aller Untergruppen H von G mit $H \supset \Gamma$ die von Γ erzeugte Gruppe und wird mit $\langle \Gamma \rangle$ bezeichnet.
- Satz: $\langle g \rangle = \{g^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$
- Linksnebenklasse: Sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G. Dann heißt $gH = \{gh \mid h \in H\}$ Linksnebenklasse von g.
- Normalteiler: Falls $\forall g \in G : gH = Hg$, heißt H Normalteiler von G.
- Satz: $g_1 \sim g_2 \Longleftrightarrow g_1 H = g_2 H$ ist eine Äquivalenzrelation.
- G/H ist die Menge der Äquivalenzklassen: $G/H = \{gH \mid g \in G\}$
- Satz von Lagrange: Ist G endlich, gilt $|G| = |G/H| \cdot |H|$, insb. ist also $|H|$ ein Teiler von $|G|$. Ist $|G|$ prim, hat G nur die trivialen Untergruppen.
- Satz: G wirkt auf G/H durch $G \times G/H \to G/H, (f, gH) \mapsto fgH$
- Satz: Ist H Normalteiler von G, ist G/H eine Gruppe. G/H heißt dann Faktorgruppe.
- Homomorphismus: $\varphi : G \to H$ mit $\forall g_1, g_2 \in G : \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$. Einige Eigenschaften:
  - $\varphi(e_G) = e_H$
  - $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$
  - Bildgruppe $\varphi(G)$ ist Untergruppe von H.
  - Ist φ bijektiv, heißt φ auch Isomorphismus.
- Kern: $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$
- $\ker(\varphi)$ ist Normalteiler von G.
- φ ist injektiv $\Longleftrightarrow \ker(\varphi) = \{e_G\}$
- Satz: Sei H Normalteiler von G. Dann ist $\Phi : G \to G/H, g \mapsto gH$ ein surjektiver Homomorphismus mit Kern H.
- Homomorphiesatz für Gruppen: Sei $\varphi : G \to H$ Homomorphismus mit Kern K. Dann sind G/K und $\varphi(G)$ isomorph.
- Vertauschung: $\tau_{ij} \in S_n$ mit $\tau_{ij}(i) = j, \tau_{ij}(j) = i, \tau_{ij}(l) = l$
- Satz vom Bücherregal: Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist Hintereinanderausführung von höchstens n Vertauschungen.

- Fehlstand: (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ heißt Fehlstand von $\sigma \in S_n$, wenn $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt. $F(\sigma) :=$ Anzahl der Fehlstände von σ.
  - $\operatorname{sgn} : S_n \to (\{\pm 1\}, \cdot), \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{F(\sigma)}$ ist ein Homomorphismus.

Ringe und Körper

- Def Ring: $(R, +, \cdot)$ mit:
  - $(R, +)$ bildet eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0
  - $(R, \cdot)$ assoziativ und abgeschlossen
  - Distributivgesetz: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- kommutativer Ring: $(R, \cdot)$ ist kommutativ
- Ring mit Eins: $(R, \cdot)$ hat neutrales Element $1 \neq 0$
- Def Körper: kommutativer Ring mit Eins, bei dem $(R, \cdot)$ eine Gruppe ist
- $\mathbb{F}_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist Körper $\Longleftrightarrow p$ prim
- Charakteristik: $\operatorname{char}(K) =$ kleinstes k, für das $\sum_{i=1}^{k} 1 = 0$, oder 0 falls ein solches k nicht existiert.
  - $\operatorname{char}(K)$ ist immer prim oder 0.

Vektorräume und lineare Abbildungen

- Def Vektorraum: $(V, \oplus, \odot)$ über Körper $(K, +, \cdot)$:
  - $\oplus : V \times V \to V$ heißt Vektoraddition, $\odot : K \times V \to V$ heißt Skalarmultiplikation
  - $(V, \oplus)$ bildet eine abelsche Gruppe
  - $(\lambda + \mu) \odot v = \lambda \odot v \oplus \mu \odot v$
  - $\lambda \odot (v \oplus w) = \lambda \odot v \oplus \lambda \odot w$
  - $(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v)$
  - $1 \odot v = v$
- Untervektorraum: $U \subset V$ heißt Untervektorraum von V, falls $(U, \oplus, \odot)$ auch ein Vektorraum ist.
- erzeugter Untervektorraum: Sei $M \subset V$. Dann heißt der Durchschnitt aller Untervektorräume U von V mit $U \supset M$ der von M erzeugte Untervektorraum und wird mit $\langle M \rangle$ bezeichnet.
- Satz vom Nullprodukt: $\lambda v = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$
- Summe von Untervektorräumen: $W_1 + W_2 := \langle W_1 \cup W_2 \rangle = \{ w_1 + w_2 \mid w_j \in W_j \}$
- V heißt endlich erzeugt, wenn es eine endliche Menge M gibt mit $\langle M \rangle = V$.
- Innere direkte Summe: wir schreiben $W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2$ falls $W_1 \cap W_2 = \{0\}$
  - Jedes $v \in W_1 \oplus W_2$ lässt sich eindeutig als $w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ darstellen.
  - komplementäre Unterräume: $W_1 \oplus W_2 = V$. Ist V endlich erzeugt, gibt es zu jedem W_1 ein komplementäres W_2.
- Basis: $(b_i)_{i \in I}$ mit $(b_i)_{i \in I}$ linear unabhängig und $\langle (b_i)_{i \in I} \rangle = V$
  - (unendliche) Familien von Vektoren heißen linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist, also $\sum \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$
  - Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.
  - Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine Basis.
- Koordinatenvektor zur Basis $(v_i)_i \in I'$: $(\lambda_i)_{i \in I}$ mit $v = \sum'_{i \in I} \lambda_i v_i$
- $\dim(V) =$ Anzahl der Basisvektoren von V. Jede Basis hat gleich viele Vektoren.
- Polynomring: $K[X] = \{(a_0, a_1, ...) \mid a_i \in K, i \in \mathbb{N}_0, a_i = 0 \text{ für fast alle } i\}$
  - $\deg(f) = \max\limits_{a_i \neq 0} i$
  - kommutativer Ring mit 1
- Lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen: $L(V, W)$, $\varphi \in L(V, W) \Longleftrightarrow \varphi : V \to W$ mit $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ und $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$
  - $L(V, W)$ ist auch ein K-Vektorraum.

- Linearform: lineare Abbildung $\varphi : V \to K$
- Endomorphismus: lineare Abbildung $\varphi : V \to V$
- Isomorphismus: bijektive lineare Abbildung
- $\varphi(v) = \varphi\left(\sum_j \lambda_j e_j\right) = \sum_j \lambda_j \varphi\left(e_j\right)$
  - $\Longrightarrow \varphi$ ist durch Angabe von $\varphi\left(e_j\right)$ vollständig bestimmt
- Koordinatenabbildung über Basis $e_1, ..., e_n$: $V \to K^n$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \mapsto (\lambda_1, ..., \lambda_n)$
  - Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum V ist isomorph zu $K^{\dim(V)}$.
- Kern: $\ker(\varphi) = \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$
- Dimensionsformeln:
  - $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\varphi(V)) = \dim(V)$
  - $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

Matrizen und lineare Gleichungen

- $(K^{r \times s}, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum der Dimension $r \cdot s$.
- $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Eins I_n.
- $\mathrm{GL}_{n(K)}$ ist die Gruppe der invertierbaren $K^{n \times n}$ Matrizen.
- Sei $A \in K^{r \times s}$. $Ax = b$ hat Lösungen $x \in K^s \Longleftrightarrow b \in \Phi_{A(K^s)}$. Ist $y \in K^s$ eine Lösung, dann ist $y + \ker(\Phi_A)$ die Menge aller Lösungen.
- Gauß-Verfahren: Es existiert eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_{r(K)}$, sodass SA eine Zeilenstufenmatrix ist. Dabei ist S eine Hintereinanderausführung von Zeilen vertauschen, Vielfache einer Zeile auf eine andere addieren, und Zeilen mit einer Konstante multiplizieren.
- Der Rang einer Matrix ist die Anzahl an Stufen in der Zeilenstufenform.
  - $\dim\left(\Phi_{A(K^s)}\right) = \mathrm{rank}(A)$
- Sei $\varphi : V \to W$ linear und $R = \dim(\varphi(V))$, dann hat jede darstellende Matrix Rang R. Es gibt Basen von V und W, sodass $A_\varphi = \begin{pmatrix} I_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dualität

- Dualraum: $V^* = L(V, K)$, mit V ein K-Vektorraum.
- duale Basis: Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis eines K-Vektorraums V. Dann ist $(v_i^*)_{i \in I}$ mit $v_i^* : V \to K, v^*_{i(v_i)} = 1, \varphi_{i(v_j)} = 0$ die duale Basis von V^* zu $(v_i)_{i \in I}$
- kanonischer Isomorphismus: $\iota : V \to V^{**}, v \mapsto \iota(v)$ mit $\iota(v) : V^* \to K, \psi \mapsto \psi(v)$
- duale Abbildung: Sei $\varphi : V \to W$ linear. Dann ist $\varphi^* : W^* \to V^*, \psi \mapsto \psi \circ \varphi$ auch linear und heißt duale Abbildung.
  - $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$

Determinanten

- Determinantenform: n-lineare (linear in allen Argumenten) alternierende ($\sigma\Delta = \mathrm{sgn}(\sigma)\Delta$) Abbildung $\Delta : V^n \to K$, die auf einer Basis von V von 0 verschieden ist.
  - Leibniz-Formel: $\Delta(v_1, ..., v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ für $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$ und $\Delta\left(e_1, ..., e_j\right) = 1$
- $\det(\varphi) = 0 \Longleftrightarrow \varphi$ nicht invertierbar
- $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi)$
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- Tauscht man zwei Zeilen/Spalten, wechselt die Determinante ihr Vorzeichen
- Addiert man das Vielfache einer Zeile auf eine andere, ändert sich die Determinante nicht
- Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente
- Laplace-Entwicklungssatz: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\left(A_{ij}\right)$

- Cramer'sche Regel: $Ax = b$ hat die Lösung $x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}$, wobei B_j durch Ersetzen der j-ten Spalte von A durch b entsteht.

Eigenwerte

- stabiler Untervektorraum: $U \subset V$ heißt φ-stabil, wenn $\varphi(W) \subset W$.
- Eigenvektor/-wert: $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\varphi(v) = \lambda v$, $\lambda \in K$. λ heißt Eigenwert.
  - $\Longleftrightarrow \langle v \rangle$ ist stabiler Unterraum
  - Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig
- Eigenraum: $\text{Eig}(\lambda) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ ist stabiler Untervektorraum von V.
- charakteristisches Polynom: $P_{\varphi(\lambda)} = \det(\varphi - \lambda I)$
  - $\lambda \in K$ ist Eigenwert $\Longleftrightarrow P_{\varphi(\lambda)} = 0 \Longleftrightarrow \text{rank}(\varphi - \lambda I) < n$
  - unabhängig von der Basis
- $m(f, c)$ heißt Vielfachheit einer Nullstelle c von f: größtes $m \in \mathbb{N}_0$ mit $f(X) = (X - c)^m \cdot h(X)$
  - $\dim(\text{Eig}(\lambda)) \leq m\left(P_\varphi, \lambda\right)$
- $\varphi \in L(V, V)$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis $v_1, ..., v_n$ von V aus Eigenvektoren von φ gibt. In dieser Basis ist $A_\varphi = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$
  - $\Longleftrightarrow \bigoplus\limits_{\lambda \in K} \text{Eig}(\lambda) = V$
  - $\Longleftrightarrow \sum\limits_{\lambda \in K} \dim(\text{Eig}(\lambda)) = n$
  - $\Longleftrightarrow P_\varphi$ zerfällt in Linearfaktoren und $\dim(\text{Eig}(\lambda)) = m\left(P_\varphi, \lambda\right)$
- Fahne: Familie von Untervektorräumen V_j mit $\dim\left(V_j\right) = j$ und $V_0 \subset V_1 \subset ...$
  - φ-invariante Fahne, falls alle V_j φ-stabil sind
- Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent. Falls sie gelten, heißt φ trigonalisierbar.
  - $\exists$ φ-invariante Fahne von V
  - $\exists$ Basis von V, sodass A_φ obere Dreiecksmatrix ist
  - P_φ zerfällt in Linearfaktoren
- Satz von Cayley-Hamilton: $P_{\varphi(\varphi)} = 0$

Jordan'sche Normalform

- $\exists$ Basis von V, sodass $A_\varphi = \text{diag}\left(J_{r_1}(\lambda_1), ..., J_{r_l}(\lambda_l)\right)$ mit $J_l(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{l \times l}$
- Hauptraum: $H(\varphi, \lambda) = \bigcup\limits_{s \geq 1} \ker((\varphi - \lambda I)^s)$
  - $H(\varphi, \lambda) = \ker(\varphi - \lambda I)^m$ mit $\dim(H(\varphi, \lambda)) = m$
  - $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{r} H\left(\varphi, \lambda_j\right)$
  - Alle $H(\varphi, \lambda)$ sind φ-stabil.

Euklidische und unitäre Vektorräume

- Def Skalarprodukt: $V \times V \to K, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle, K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
  - $\forall w \in V : V \to K, v \mapsto \langle v, w \rangle$ ist linear
  - $\forall v, w \in V : \langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$
  - $\forall v \in V \setminus \{0\} : \langle v, v \rangle > 0$
- Ein reeler/komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt heißt euklidisch/unitär.
- Länge/Betrag: $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ induziert eine Norm
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle v, w \rangle| \leq |v| \cdot |w|$
- Pythagoras: $|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2 + \langle w, v \rangle + \langle v, w \rangle$
- Def Norm: $V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$
  - $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$
  - $\forall \lambda \in K, v \in V : \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

- $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
- reele Polarisierung: $|v + w|^2 - |v - w|^2 = 4 \texttt{ inner } vw$
- komplexe Polarisierung: $|v + w|^2 + |v + iw|^2 - |v - w|^2 - |v - iw|^2 = 4 \texttt{ inner } vw$
- Parallelogrammgleichung: $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$
- Orthogonalität: $v \perp w \iff \texttt{inner } vw = 0$
  - $(v_i)_{i \in I}$ heißt Orthonormalbasis, falls $\forall i \neq j : v_i \perp v_j$ und $|v_i| = 1$
- Gram-Schmidt: Jeder endlich erzeugte $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum mit innerem Produkt hat eine Orthonormalbasis
  - Mit Basis $w_1, ..., w_n$: $v_1 = w_1, v_i = w_i - \sum_{j=1}^{i-1} t_j v_j$ sodass $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. $t_j = \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$ ist Lösung.
- orthogonales Komplement eines Untervektorraums: $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U : \texttt{inner } vu = 0\}$
  - $U \oplus U^\perp = V, \dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$

Orthogonale und unitäre Endomorphismen

- φ heißt orthogonal ($\mathbb{R}$) bzw. unitär ($\mathbb{C}$), falls $\forall v \in V : |\varphi(v)| = |v|$
  - $\iff \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \texttt{inner } vw$
  - $v \perp w \iff \varphi(v) \perp \varphi(w)$
  - $\ker(\varphi) = \{0\}$
  - Alle Eigenwerte haben $|\lambda| = 1$
  - $|\det(\varphi)| = 1$
  - Die orthogonalen bzw. unitären Abbildungen bilden eine Gruppe $O(V)$ bzw. $U(V)$
  - $\exists$ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\varphi \implies \varphi$ ist diagonalisierbar
- $x^T A y = x^T B y \implies A = B$
- Folgende Eigenschaften sind äquivalent:
  - A_φ ist orthogonal/unitär
  - $| \ A^T A = I$
  - Die Spalten und Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von K^n
- Additionstheoreme:
  - $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
  - $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
- $A \in O(2)$ hat die Form $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mp\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \pm\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Bilinearformen, transponierte und adjungierte Abbildung

- Def Bilinearform: $B : V \times W \to K$, B linear in beiden Argumenten
  - darstellende Matrix: $A_B = \left(B(v_i, w_j)\right)_{ij}$ mit $v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m$ Basen von V, W.
  - $B(x, y) = x^T A y$
- semilinear: $\beta : W \to W'$ mit W, W' sind $\mathbb{C}$-Vektorräume
  - $\forall w_1, w_2 \in W : \beta(w_1 + w_2) = \beta(w_1) + \beta(w_2)$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{C}, w \in W : \beta(\lambda w) = | \ \lambda \beta(w)$
- Sesquilinearform: $B : V \times W \to \mathbb{C}$ linear im ersten Argument und semilinear im zweiten Argument
- Nullraum: $N_V = \{v \in V : B(v, w) = 0 \forall w \in W\}$ ist Untervektorraum von V. Analog für W.
  - Wenn $N_V = \{0_V\}$ und $N_W = \{0_W\}$, heißt B duale Paarung oder nicht ausgeartet.
- B heißt symmetrisch, wenn $B(v, w) = B(w, v) \iff$ darstellende Matrix ist symmetrisch
- B heißt hermitesch, wenn $B(v, w) = \overline{B(w, v)} \iff$ darstellende Matrix ist hermitesch
- duale Abbildung: Seien $B_V : V \times V' \to K$ und $B_W : W \times W' \to K$ duale Paarungen und $\varphi : V \to W$ linear. Dann heißt $\varphi' : W' \to V'$ dual zu φ, wenn $\forall v \in V, w' \in W' : B_V(v, \varphi'(w')) = B_W(\varphi(v), w')$

    - Es gibt höchstens eine duale Abbildung.
- Eine symmetrische/hermitesche Matrix A_φ hat nur reele Eigenwerte und es gibt eine Orthonormalbasis, sodass A_φ diagonal ist.

Symmetrische Bilinearformen im Reelen

- quadratische Form: Sei $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann heißt $Q : V \to \mathbb{R}, Q(v) = B(v, v)$ die quadratische Form zu B.
- Parallelogrammgleichung: $Q(v + w) + Q(v - w) = 2(Q(v) + Q(w))$
- Polarisierung: $Q(v + w) - Q(v - w) = 4B(v, w)$
- B heißt pos. definit, falls $Q(v) > 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$.
    - pos. semidefinit falls $\geq$
    - neg. (semi-)definit falls $-B$ pos. (semi-)definit
    - indefinit sonst
- A ist pos. definit $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv
- Satz: Falls B indefinit und nicht ausgeartet ist, gibt es Untervektorräume V^+ und V^- mit $V^- = (V^+)^\perp$ bzgl. des durch B induzierten Skalarprodukts, sodass B pos. definit auf V^+ und neg. definit auf V^- ist.
    - $\dim(V^+)$ heißt Index, $\dim(V^+) - \dim(V^-)$ heißt Signatur.
    - Sylvester'sches Trägheitsgesetz: A_B hat Index viele positive Eigenwerte.