Agla 2 Klausurzettel

Ringtheorie

- Sei $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Ringhomomorphismus. Dann ist $\varphi = 0$ oder $\varphi = \mathrm{id}$.
- Ideal: Unterring U von R mit $ur \in U, ru \in U$ für alle $u \in U, r \in R$
- Der Kern eines Ringhomomorphismus ist ein Ideal.
- Faktorring: Sei $\mathfrak{a}$ Ideal von R, dann ist $\frac{R}{\mathfrak{a}}$ der Faktorring von R nach $\mathfrak{a}$.
- Ideale sind abgeschlossen unter Schnitt.
- Erzeugte Ideale: $(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \subset R \text{ Ideal} \\ A \subset \mathfrak{a}}} \mathfrak{a}$ für $A \subset R$
  - (A) besteht aus endlichen Linearkombination von Elementen von R der Gestalt $\{na, ra, ar, ras \mid n \in \mathbb{Z}; a \in A; r, s, \in R\}$
- Hauptideale werden von einem Element erzeugt
- Homomorphiesatz für Ringe: Sei $\varphi : R \to S$ Ringhomomorphismus, dann ist durch $\Phi : R/\text{ Kern } \varphi \to S, r + \text{Kern } \varphi \mapsto \varphi(r)$ ein injektiver Ringhomomorphismus definiert.

Teilbarkeit

- Sei $a \in R \setminus \{0\}, b \in R$. Dann $a \mid b$, wenn $\exists c \in R$ mit $ac = b$
  - $r \mid 0$
  - $a \mid b \wedge a \mid c \Longrightarrow a \mid rb + sc \ \forall r, s \in R$
  - $a \mid b \wedge b \mid c \Longrightarrow a \mid c$
  - $a \mid b \Longrightarrow (b) \subset (a)$
- Nullteiler: $a, b \in R \setminus \{0\}$ mit $ab = 0$
  - Kürzungsregel: Ist $a \neq 0$ kein Nullteiler, gilt $ax = ay \Longrightarrow x = y$
  - In nullteilerfreien Ringen gilt: $a \mid b \Longrightarrow ar \mid br \ \forall r \in R \setminus \{0\}$
- Integritätsring: kommutativer nullteilerfreier Ring mit Eins
  - $a \mid a \ \forall a \in R \setminus \{0\}$
  - $1 \mid a \ \forall a \in R$
  - Einheitengruppe: $r \in R^\times \iff r \mid 1$
  - assoziierte Elemente: $a \sim b$, falls $\exists r \in R^\times$ mit $a = br$
  - gemeinsamer Teiler: $d \in R$ mit $d \mid a \wedge d \mid b$
  - ggT: $D \in R$ mit $d \mid D$ für alle gemeinsamen Teiler d von a und b. Alle ggT von a und b sind zueinander assoziiert.
  - teilerfremd: 1 ist ggT
  - Bezout: Sei $(a_1, ..., a_s) = (d)$ Hauptideal, dann ist $\gcd(a_1, ..., a_s) = d$ und es gibt $r_1, ..., r_s \in R$ mit $d = \sum_{i=1}^{s} r_i a_i$
  - Primelement: $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ mit $p \mid ab \Longrightarrow p \mid a \vee p \mid b$. Zwei Primelemente sind zueinander assoziiert oder teilerfremd.
  - Seien $p_1, ..., p_s, q_1, ..., q_t$ Primelemente und $\prod_{i=1}^{s} p_i = \prod_{i=1}^{t} q_i$. Dann ist $s = t$ und es gibt ein $\sigma \in S_s$ mit $p_i \sim q_{\sigma(i)}$
- Hauptidealring: Integritätsring, in dem jedes Ideal Hauptideal ist
  - $a \mid b \iff (b) \subset (a)$
  - $a \mid b \wedge b \mid a \iff (a) = (b) \iff a \sim b$
  - Euklid: Seien a, b teilerfremd und $ab \neq 0$. Dann gilt $a \mid bc \Longrightarrow a \mid c$ und $a \mid c \wedge b \mid c \Longrightarrow ab \mid c$
  - Jedes $a \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ hat eine bis auf Assoziation eindeutige Primfaktorisierung.
  - $R/(a)$ ist Körper $\iff a$ ist Primelement

- Chinesischer Restsatz: Seien $a, b \in R$ teilerfremdn. Dann ist $R/(ab) \cong R/(a) \times R/(b)$ mit $x + (ab) \mapsto (x + (a), x + (b))$
- Sei K Körper, dann ist $K[X]$ Hauptidealring.

Moduln

- Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi \in L(V, V)$, dann ist V ein $K[X]$-Modul durch $(f, v) \mapsto f(\varphi)(v)$
- erzeugte Untermoduln: $\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{U \subset M \\ A \subset U}} U \text{ Untermodul} = \left\{ \sum_{j=1}^{s} r_j a_j \mid s \in \mathbb{N}, r_j \in R, a_j \in A \right\}$ mit $A \subset M$
- innere Summe: $\sum_{j \in J} U_j = \langle \bigcup_{j \in J} U_j \rangle = \left\{ \sum_{j \in J'} u_j \mid u_j \in U_j, J' \subset J \text{ endlich} \right\}$
- direkte Summe: $\sum_{j \in J'} u_j = 0, J' \subset J$ endlich $\implies u_j = 0$. Dann schreiben wir $\bigoplus_{j \in J} U_j$
- Faktormodul: Sei $U \subset M$ Untermodul, dann ist M/U ein R-Modul durch $(r, m + U) \mapsto rm + U$
- Modulhomomorphismus: Gruppenhomomorphismus $\varphi : M \to N$ mit $\varphi(rm) = r\varphi(m)$
  - Kern und Bild sind Untermoduln.
  - φ ist injektiv $\iff \text{Kern}(\varphi) = \{0\}$
- Homomorphiesatz für Moduln: Sei $\varphi : M \to N$ Modulhomomorphismus, dann ist durch $\Phi : M/\text{ Kern } \varphi \to N, m + \text{Kern } \varphi \mapsto \varphi(m)$ ein injektiver Modulhomomorphismus definiert.
- Annulator: Sei $a \in M$, dann ist $\text{Ann}(a) = \{r \in R \mid ra = 0\}$
  - $Ra \cong R/\text{ Ann}(a)$
- Sei $U \subset M$ Untermodul, dann ist $\text{Ann } U = \bigcap_{u \in U} \text{Ann}(u) = \{r \in R \mid ru = 0 \ \forall u \in U\}$
  - Ann U ist Ideal in R
- Torsionselemente: $\text{Tor } M = \{a \in M \mid \text{Ann}(a) \neq \{0\}\}$
  - Hat R Nullteiler, existieren nichttriviale Torsionselemente.
  - torsionsfreies Modul: $\text{Tor } M = \{0\}$
- Ist R Integritätsring, so ist $\text{Tor } M$ Untermodul von M und $M/\text{ Tor } M$ torsionsfrei.

Freie Moduln

- lineare Unabhängigkeit
  - endlich: $m_1, ..., m_s \in M$ sind linear unabhängig, wenn $\sum_{i=1}^{s} r_i m_i = 0 \implies r_i = 0 \ \forall i = 1, ..., s$.
    Achtung: $m \in \text{Tor } M \implies m$ ist linear abhängig.
  - unendlich: $A \subset M$ ist linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist.
- Basis: $S \subset M$ mit $\langle S \rangle = M$ und S linear unabhängig. Existiert eine Basis, heißt M frei über S. Nur torsionsfreie Moduln können frei sein.
- äquivalent:
  - M ist frei über S
  - Jedes $m \in M$ lässt sich eindeutig als endliche Linearkombination von Elementen aus S schreiben.
  - $M = \bigoplus_{s \in S} Rs = \bigoplus_{s \in S} R$
- Ist M endlich erzeugt und frei, ist $M \cong R^n$.
  - Ist R Hauptidealring, ist n eineindeutig bestimmt und heißt Rang von M.
- Sei M ein R-Modul, F freier R-Modul, und $\varphi : M \to F$ ein surjektiver Modulhomomorphismus. Dann existiert ein Homomorphismus $\psi : F \to M$ mit $\varphi \circ \psi = \text{id}_F$ und $M = \text{Kern } \varphi \oplus \psi(F)$
  - Ist $U \subset M$ Untermodul und M/U frei, gibt es einen Untermodul $V \subset M$ mit $M = U \oplus V$.

Moduln über Hauptidealringen