
Algebra I — PROBEKLAUSUR

Schreibzeit: 120 Minuten

Datum: 13.02.2026

Bitte lesbar ausfüllen!

Matrikelnummer: _____

Nicht zu bewertende Aufgabe: _____

Allgemeines zur Klausur:

- **Zu bearbeiten sind 4 der 5 Aufgaben.**
- Alle Antworten sind zu begründen.
- Geben Sie bitte an, welche Aufgabe nicht gewertet werden soll.
Fehlt diese Angabe werden die Aufgaben in der Reihenfolge der Abgabe gewertet.
- Tragen Sie bitte Ihre Matrikelnummer deutlich lesbar auf allen Seiten ein.
- Legen Sie bitte Ihren Studierendenausweis sichtbar auf den Tisch.
- Es sind keine elektronischen Hilfsmittel erlaubt.
Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen Sie es nicht auf den Tisch.
- Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einer eigenen Seite.
- Schreiben Sie mit einem blauen oder schwarzen dokumentenechten Stift.
(insbesondere kein Bleistift und keine rote oder grüne Farbe)
- Achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben und streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Hier bitte nichts eintragen!

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1.

- (a) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad 2 in $\mathbb{F}_2[X]$.
- (b) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau einen Körper mit 4 Elementen gibt. Dieser wird mit $\mathbb{F}_4$ bezeichnet.
- (c) Untersuchen Sie das Polynom $X^4 + X + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$ und in $\mathbb{F}_4[X]$ auf Irreduzibilität.

Aufgabe 2.

- (a) Ist

$$X_1^2(X_2 + X_3) + X_2^2(X_1 + X_3) + X_3^2(X_1 + X_2) \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$$

ein symmetrisches Polynom? Wenn ja, drücken Sie es als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen in drei Unbestimmten aus.

- (b) Ist

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n X_j \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$$

ein symmetrisches Polynom? Wenn ja, drücken Sie es als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen in n Unbestimmten aus.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $\mathfrak{a} \subset R[X]$ ein Ideal. Sei $n \in \mathbb{N}$, und in $\mathfrak{a}$ gebe es ein normiertes Polynom vom Grad n . Ferner gelte für alle $f \in \mathfrak{a}$ mit $f \neq 0$ stets $\deg(f) \geq n$.

Zeigen Sie: $\mathfrak{a}$ ist ein Hauptideal.

Aufgabe 4. Seien G, H Gruppen und $\phi: G \rightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- (a) Ist G abelsch, dann ist H abelsch.
- (b) Ist H abelsch, dann ist G abelsch.
- (c) Ist G zyklisch, dann ist H zyklisch
- (d) Ist H zyklisch, dann ist G zyklisch.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}$ eine algebraische Zahl ist und bestimmen Sie deren Minimalpolynom.