Diff 1 Klausurzettel

Relationen

- Relation: $\rho \subseteq A \times B$
- Definitionsbereich: $\operatorname{dom}(\rho) := \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in \rho\}$
- Bild: $\operatorname{im}(\rho) := \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in \rho\}$
- Umkehrrelation: $\rho^{-1} := \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\}$
- Verkettung: $\sigma \circ \rho := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in \rho \land (b, c) \in \sigma\} \subseteq A \times C$
- Äquivalenzrelation: reflexiv ($x = x$), symmetrisch ($x = y \Longrightarrow y = x$), transitiv ($x = y \land y = z \Longrightarrow x = z$)
- Äquivalenzklassen: $[x]_= := \{y \in X \mid x = y\}$
- $=$ induziert eine Partition von X durch die Äquivalenzklassen $[x]_=$
- Ordnungsrelation: reflexiv, antisymmetrisch ($x \leq y \land y \leq x \Longrightarrow x = y$), transitiv
- Totale Ordnung: $\forall x, y \in M : x \leq y \lor y \leq x$
- obere Schranke $b \in M$ von $S \subseteq M$: $\forall x \in S : x \leq b$
  - Supremum: $\sup S$ ist die kleinste obere Schranke von S

Funktionen

- Funktion: Relation $f \subseteq A \times B$ mit $\operatorname{dom}(f) = A$ und $f(x) = y_1 \land f(x) = y_2 \Longrightarrow y_1 = y_2$
- Graph: $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \in A \times B \mid x \in A\} \subseteq A \times B$
- Urbild: $f^{-1}(C) := \{a \in A \mid f(a) \in C\}$
- injektiv: $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ (kein Element wird zweimal getroffen)
- surjektiv: $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$ (jedes Element wird getroffen)
- $\exists$ injektive Funktion $f : M \to N \Longrightarrow |M| \leq |N|$
- $\exists$ surjektive Funktion $f : M \to N \Longrightarrow |M| \geq |N|$
- endliche Menge M: $\exists$ bijektive Funktion $f : M \to \{1, ..., n\}$
- abzählbar unendliche Menge M: $\exists$ injektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$
  - sonst überabzählbar undendlich

Reele Zahlen

- Körperaxiome (2x abelsche Gruppe (Kommutativität, Assoziativität, neutrales Element, inverse Elemente), Distributivität)
  - Halbgruppenaxiome: Assoziativität, neutrales Element
- Ordnungsaxiome für $<$ (Irreflixivität, Transitivität, Vergleichbarkeit, Verträglichkeit mit Addition/ Multiplikation)
- Vollständigkeitsaxiom: Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge hat ein Supremum
- Archimedes: $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
- Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$
  - $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

Komplexe Zahlen

- komplexe Polarform: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$
- n-ten Wurzeln: $z_k := \sqrt[n]{R}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$

Folgen

- Konvergenz: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
- ε-Umgebung: $U_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$

- punktierte ε-Umgebung: $\dot{U}_\varepsilon(z_0) = U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$
- Bestimmte Divergenz: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall C > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > C$
- Eigenschaften bestimmt divergenter Folgen ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n \neq \infty$)
  - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = \pm\infty$ für $c \gtrless 0$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n d_n = \infty$ für $d_n \geq c > 0$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_n}{a_n} = 0$ für $a_n \neq 0$
- Minorantenkriterium: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Dann: $c_n \geq a_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$
- Eigenschaften konvergenter Folgen
  - $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ für $b_n \neq 0, b \neq 0$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
- Teilfolge: $(b_n) \subseteq (a_n) \iff \exists (n_k)$ mon. wachsend : $\forall k \in \mathbb{N} : b_k = a_{n_k}$
  - Jede reele Folge enthält eine monotone Teilfolge
- Polizistenprinzip: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x, a_n \leq x_n \leq b_n$ für fast alle $n \in N \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
- Monotone Konvergenz: Sei (a_n) mon. wachsend. Dann ist (a_n) konvergent $\iff$ (a_n) nach oben beschränkt ist. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$
- Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge
- d'Alembert'sches Quotientenkriterium: Sei $a_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Dann: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & : q \in [0,1) \\ \infty & : q > 1 \\ ? & : q = 1 \end{cases}$
- Wurzelkriterium: Sei $a_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Dann: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & : q \in (0,1) \\ \infty & : q > 1 \\ ? & : q = 1 \end{cases}$
- Cauchy-Folge: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$
  - Cauchy-Folgen sind beschränkt
- Cauchy-Kriterium: (a_n) konvergiert $\iff$ (a_n) Cauchy-Folge
- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{R}(z_n) + i \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{I}(z_n)$

Topologie

- offene Menge: $\forall x \in M \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq M$
  - abgeschlossen unter Vereinigung und endlichem Durchschnitt
- abgeschlossenen Menge: $\mathbb{R} \setminus M$ ist offen
  - abgeschlossen unter Durchschnitt und endlicher Vereinigung
- Häufungspunkt: $\forall \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$
  - $\exists (x_n) \subseteq M \setminus \{x\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff x$ ist Häufungspunkt

Grenzwerte von Funktionen

- Grenwert: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von I. Dann $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall (x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 : \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$
  - äquivalent: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f\left(\dot{U}_\delta(x_0)\right) \subseteq U_\varepsilon(L)$
- Rechenregeln

- $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

- Polizistenprinzip analog zu Folgen

Stetigkeit

- $\varepsilon\delta$-Kriterium: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
  - äquivalent: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$
- Folgenkriterium: $\forall (x_n) \subseteq I, \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$
- Grenzwertkriterium: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Klassifikation von Unstetigkeitsstellen:
  - hebbare Lücke: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I \setminus \{x_0\}}} f(x)$ existiert
  - 1. Art (Sprungstelle): $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x)$ existeren beide
  - 2. Art: sonst
- Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f bis auf abzählbar viele Sprungstellen stetig
- Stetigkeit ist abgeschlossen unter $+, \cdot, /, \circ$
- Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und o.B.d.A $y_0 \in [f(a), f(b)]$. Dann existiert $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$
- Stetige Funktionen von einem Intervall bilden auf ein Intervall ab
- Das Inverse einer streng monotonen Funktion ist streng monoton
- Brouwer'scher Fixpunktsatz: Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig. Dann existiert ein Fixpunkt
- Weierstraß: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt sein Supremum und Infimum an
- Stetige Funktionen sind lokal beschränkt

Gleichmäßige Stetigkeit

- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
  - δ darf hier nicht von x_0 abhängen
- f glm. stetig $\iff$ für jede Cauchy-Folge (x_n) ist auch $(f(x_n))$ Cauchy-Folge
- Heine: stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind glm. stetig
- Ring der stetigen Funktionen: $C(X, Y)$: abelsche Gruppe mit $+$, Halbgruppe mit $\cdot$

Differenzialrechnung

- Differenzialquotient: $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Diff'bare Funktionen sind stetig
- Kritischer Punkt: $f'(x_0) = 0$
- Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diff'bar und o.B.d.A. $\eta \in [f'(a), f'(b)]$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \eta$
- Ableitungen bilden Intervalle in Intervalle ab
- Rolle: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) diffbar und $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein kritischer Punkt $x_0 \in (a, b)$ von f
- Mittelwertsatz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) diff'bar. Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
  - $f' > 0 \implies f$ streng mon. wachsend
  - $f' < 0 \implies f$ streng mon. fallend
  - $f' = 0 \implies f$ konstant

- f' beschränkt durch $L \geq 0 \iff f$ Lipschitz-stetig mit Konstante L
- L'Hôpital: Sei $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ diff'bar und $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ und $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = 0 \vee \lim\limits_{x \to b} g(x) = \infty$. Wenn $\lim\limits_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert, dann ist $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

Lokale Extrema und Konvexität

- lokales Maximum: $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$ ist lokales Maximum, falls $\exists \delta > 0 : \forall x \in I \cap U_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$
  - mit strikter Ungleichung striktes Maximum
- Notwendiges Kriterium: $(x_0, f(x_0))$ lokales Extremum $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$
- Hinreichendes Kriterium:
  - $f' \geq 0$ links von x_0, $f' \leq 0$ rechts von $x_0 \Longrightarrow (x_0, f(x_0))$ lokales Maximum
    - mit strikter Ungleichung striktes Maximum
  - $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow (x_0, f(x_0))$ lokales Maximum
- f ist konvex, wenn $\forall \lambda \in [0, 1] : f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y)$
  - mit strikter Ungleichung strikte Konvexität
- f (strikt) konvex $\iff f'$ (streng) mon. wachsend
- Wendestelle: $x_0 \in I$ ist Wendestellen, wenn $\exists \varepsilon > 0 : f$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex/konkav und auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav/konvex

Satz von Taylor

- Taylorpolynom: $T_n f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$
- Taylor'scher Satz mit Lagrange Restglied: $\exists \xi \in (a, b) : f(b) = T_n f(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$
- Taylor'scher Satz mit Integral-Restglied: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(y)(x - y)^n dy$

Integrale rationaler Funktionen

- Partialbruchzerlegung: Sei $\frac{p(x)}{q(x)}$ gegeben. Teile $q(x)$ in eine Produktdarstellung auf: $q(x) = c \cdot \prod\limits_{j=1}^{r} (x - x_j)^{\rho_j} \cdot \prod\limits_{j=1}^{s} (x^2 + A_j x + B_j)^{\sigma_j}$. Die Partialbruchzerlegung ist nun: $\frac{p(x)}{q(x)} = \sum\limits_{j=1}^{r} \sum\limits_{k=1}^{\rho_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k} + \sum\limits_{j=1}^{s} \sum\limits_{k=1}^{\rho_j} \frac{\alpha_{jk} x + \beta_{jk}}{(x^2 + A_j x + B_j)^k}$. Die a, α, β erhält man durch Multiplizieren beider Seiten mit $q(x)$, Eliminieren der Nenner, und dann Einsetzen von Werten für x
- $\int \frac{A}{x-a} \,\mathrm{d}x = A \log|x - a| + C$
- $\int \frac{A}{(x-a)^k} \,\mathrm{d}x = \frac{A}{(1-l)(x-a)^{k-1}}$
- $\int \frac{Bx+D}{(x-b)^2+c^2} = \frac{B}{2} \log((x - b)^2 + c^2) + \frac{bB+D}{c} \arctan \frac{x-b}{c}$
- $\int R(e^x) \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t} R(t) \,\mathrm{d}t$
- $\int R(\tan(x)) \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t^2} R(t) \,\mathrm{d}t$

Riemann-Integral

- Zerlegung: $Z = (x_0, ..., x_n), a = x_0 < ... < x_n = b$
  - Feinheit: $d(Z) = \max(x_{i+1} - x_i)$
- Zwischenwertmenge: $T = (\xi_1, ..., \xi_n), \xi_{i+1} \in [x_i, x_i + 1]$
- Riemannsumme: $S_{f(Z,T)} := \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$
- Riemann-Integral: $I = \int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall Z, T : d(Z) < \delta \Longrightarrow |S_{f(Z,T)} - I| < \varepsilon$
  - Cauchy-Integrabilitätskriterium: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall Z_1, Z_2, T_1, T_2 : \max(d(Z_1), d(Z_2)) < \delta \Longrightarrow |S_{f(Z_1,T_1)} - S_{f(Z_2,T_2)}| < \varepsilon$
- $f \leq g \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x) \,\mathrm{d}x$

- $| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \mid \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \, (b-a)$
- Einschachtelung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabel $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists g, h : [a,b] \to \mathbb{R} : g(x) \leq f(x) \leq h(x) \implies \int_a^b (h(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x < \varepsilon$
- Mittelwertsatz: Sei f stetig, $g \geq 0$. Dann: $\exists \xi \in [a,b] : f(\xi) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$
  - Mit $g(x) = 1 : f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$
- $| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \mid \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$
- 2. Mittelwertsatz: Sei f stetig, g stetig und monoton. Dann: $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x) \, \mathrm{d}x + g(b) \int_\xi^b f(x) \, \mathrm{d}x$

Uneigentliche Integrale

- Sei f auf $[a,b)$ R-integrabel. Das Integral ist konvergent, wenn $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x := \lim_{\xi \to b-} \int_a^\xi f(x) \, \mathrm{d}x$ existiert
  - Das Integral ist absolut konvergent, wenn $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ konvergiert
- Cauchy-Kriterium: Das Integral ist konvergent $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a,b) : \forall x_1, x_2 \in [c,b) : | \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, \mathrm{d}x \mid < \varepsilon$
- Majoranten-/Minorantenkriterium: Sei $0 \leq f(x) \leq g(x)$.
  - $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$ konvergent $\implies \int_a^b f(x)$ konvergent
  - $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ divergent $\implies \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$ divergent

Reihen

- $\sum_{k=1}^\infty a_k := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n a_k$
- Notwendiges Konvergenzkriterium: $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent $\implies \lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- Integralkriterium: Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, mon. fallend, und $f(k) = a_k > 0$. Dann: $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent $\iff \int_1^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$ konvergent
- Leibnizkriterium: Sei $\sum_{k=1}^\infty a_k$ alternierend und $(|a_k|)$ eine monotone Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty a_k$
- Majorantenkriterium: Sei $|a_k| \leq c_k$ für fast alle k und $\sum_{k=0}^\infty c_k$ konvergent. Dann ist $\sum_{k=0}^\infty a_k$ absolut konvergent
- Wurzelkriterium: Sei $L := \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Falls $L < 1$, ist $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent. Falls $L > 1$, ist $\sum_{k=1}^\infty a_k$ divergent.
- Quotientenkriterium: Sei $L := \lim_{k \to \infty} | \frac{a_{k+1}}{a_k} |$. Falls $L < 1$, ist $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent. Falls $L > 1$, ist $\sum_{k=1}^\infty a_k$ divergent.
- Cauchy-Produkt/Faltungsprodukt: Seien $\sum_{k=0}^\infty a_k = s$ und $\sum_{k=0}^\infty b_k = t$ absolut konvergent. Dann ist $\sum_{k=0}^\infty \sum_{i+j=k} a_i b_j = st$ absolut konvergent

- Unbedingte Konvergenz: Jede Umordnung der Glieder ist konvergent und hat den gleichen Reihenwert
  - Umordnungssatz: unbedingt konvergent $\Longleftrightarrow$ absolut konvergent
- Riemannscher Umordnungssatz: eine bedingt konvergente Reihe kann durch Umordnung einen beliebigen Reihenwert erhalten oder divergieren

Funktionenfolgen und -reihen

- Punktweise Konvergenz: $f_n \to f \Longleftrightarrow \forall x \in I : \lim\limits_{n\to\infty} f_{n(x)} = f(x)$
- Gleichmäßige Konvergenz $f_n \rightrightarrows f \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_{n(x)} - f(x)| = 0$
  - $\rightrightarrows \Longrightarrow \to$
  - $(\alpha f_n + \beta g_n) \rightrightarrows \alpha f + \beta g$
  - $(f_n g_n) \rightrightarrows fg$
- Cauchy-Eigenschaft: $f_n \rightrightarrows f \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Longrightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$
- Sei (f_n) stetig/integrierbar/diffbar, $f_n \rightrightarrows f$. Dann ist f stetig/integrierbar/diffbar. Bei Ableitung muss $f_{n'}$ auch glm. konvergieren
- Weierstraß-Kriterium: Sei $|f_{k(x)}| \leq c_k$ und $\sum c_k$ konvergent. Dann ist $\sum f_k$ glm. konvergent

Potenzreihen

- Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0: $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$
- Konvergenzradius von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$: $R := \sup\left\{\rho \geq 0 \mid \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k \text{ konvergiert}\right\}$
  - Hadamard-Formel: $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$
  - Euler-Formel: $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$
- Taylor-Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$
- Geometrische Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
- Binomische Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1 + x)^\alpha$

Random Stuff

- binomische Formel: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ mon. steigend. Dann existiert ein Fixpunkt
- auf $\mathbb{R}$: kompakt $\Longleftrightarrow$ beschränkt und abgeschlossen
- Lipschitz-Stetigkeit: $\exists C \geq 0 : \forall x, y \in I : |f(x) - f(x)| \leq C\ |x - y|$
- LIATE-Regel: man sollte ableiten: Logarithmen, Inverse Trigfunktionen, Algebraische Funktionen, Trigfunktionen, Exponentialfunktionen
- $\sin(x) = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
- $\cos(x) = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$
- $\|f - g\|_\infty := \sup\limits_{x\in I} |f(x) - g(x)|$

Bewiesene Grenzwerte

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-k} = 0, k \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & : |q| < 1 \\ \infty & : q > 1 \end{cases}$
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$