Differenzial- und Integralrechnung I — Winter 2022/23

Aufgabe 1 (Grundlagen)

(i) Seien P und Q Aussagen. Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$P \wedge [(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)]$$

so weit wie möglich.

(ii) Seien M, A, B Mengen. Beweisen Sie, dass

$$M \times (A \cup B) = (M \times A) \cup (M \times B).$$

Lösung

(i) Die Aussagen $P \to Q$ und $\neg Q \to \neg P$ sind logisch äquivalent. Daher vereinfacht sich der angegebene Ausdruck zu P.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} M \times (A \cup B) &= \{(x,y) \mid x \in M \wedge (y \in A \vee y \in B)\} \\ &= \{(x,y) \mid (x \in M \wedge y \in A) \vee (x \in M \wedge y \in B)\} \\ &= \{(x,y) \mid x \in M \wedge y \in A\} \cup \{(x,y) \mid x \in M \wedge y \in B\} = (M \times A) \cup (M \times B). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Folgen)

Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 = 0$ und

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie weiterhin, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert besitzt, und berechnen Sie diesen.

Lösung

(i) Wir zeigen $0 \leq a_n < a_{n+1}$ durch Induktion nach n. Die Aussage gilt wegen $a_1 = 0$ und $a_2 = 1/2$ für $n = 1$. Gilt $0 \leq a_n < a_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$a_{n+2} = 1 - \frac{1}{2 + a_{n+1}} > 1 - \frac{1}{2 + a_n} = a_{n+1}.$$

(ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist strikt monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt. Daher existiert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Indem wir in $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+a_n}$ zur Grenze für $n \to \infty$ übergehen, erhalten wir

$$a = 1 - \frac{1}{2 + a}.$$

Die resultierende quadratische Gleichung $a^2 + a - 1 = 0$ für a liefert wegen $a > 0$

$$a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Fun fact

Sei

$$b_0 = 0,\ \ b_1 = 1,\ \ b_2 = 1,\ \ b_3 = 2,\ \ b_4 = 3,\ \ b_5 = 5,\ \ b_6 = 8,\ \ b_7 = 13,\ \ \ldots$$

die **Fibonacci-Folge**, d. h. $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ und

$$b_{n+1} = b_{n-1} + b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann

$$a_n = \frac{b_{2n-2}}{b_{2n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 (Stetigkeit)

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin x - e^{-x}$ genau eine Nullstelle besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to+0} x^x = 1$.

Lösung

(i) Es gilt $f'(x) = \cos x + e^{-x} > 0$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Damit ist die Funktion f strikt monoton wachsend. Die Behauptung folgt aus $f(0) = -1 < 0$ und $f(\pi/2) = 1 - e^{-\pi/2} > 0$.

(ii) Mittels l'Hôspital erhalten wir

$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$$

Daher

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} \mathrm{e}^{x\log x} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to+0} x\log x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Aufgabe 4 (Kurvendiskussion)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x - 4\arctan x.$$

(i) Untersuchen Sie das Verhalten von f im Unendlichen. Bestimmen Sie $a_\pm, b_\pm \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) - (a_\pm x + b_\pm) \longrightarrow 0 \quad \text{für } x \to \pm\infty.$$

(ii) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

(iii) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte von f.

Lösung

(i) Es gilt $\arctan x \to \pm\frac{\pi}{2}$ für $x \to \pm\infty$. Damit erhalten wir

$$f(x) - (x \mp 2\pi) \to 0 \quad \text{für } x \to \pm\infty$$

(also $a_\pm = 1$, $b_\pm = \mp 2\pi$).

(ii) Weiter gilt $f'(x) = 1 - \frac{4}{1+x^2}$. Somit ist f strikt monoton fallend für $|x| \leq \sqrt{3}$ und strikt monoton wachsend für $|x| \geq \sqrt{3}$.

(iii) Die lokalen Extremstellen von f sind $x = \pm\sqrt{3}$ mit

$$f(\pm\sqrt{3}) = \mp\left(4\arctan\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) = \mp\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \approx \mp 2,4567$$

(wegen $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, also $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ und $\arctan\sqrt{3} = \pi/3$). An $x = -\sqrt{3}$ hat f ein lokales Maximum, an $x = \sqrt{3}$ ein lokales Minimum.

Aufgabe 5 (Integralrechnung)
Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x^3-x^2+x-1}.$$

Lösung

Das Nennerpolynom faktorisiert wie folgt: $x^3-x^2+x-1=(x^2+1)(x-1)$.

Folglich haben wir eine Partialbruchzerlegung wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} &= \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{x^3-x^2+x-1} \\ &= \frac{(A+B)\,x^2+(C-B)\,x+(A-C)}{x^3-x^2+x-1}.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich für die Zählerpolynome liefert

$$A+B=0, \quad C-B=2, \quad A-C=1,$$

also

$$A=\frac{3}{2}, \quad B=-\frac{3}{2}, \quad C=\frac{1}{2}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{3}{2}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\ &= \frac{3}{2}\log|x-1|-\frac{3}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+k, \quad x\neq 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (Integralrechnung)
Gegeben sei die Funktion $\Phi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(x) = \int\limits_x^\infty \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y.$$

(i) Bestimmen Sie eine Näherung von $\Phi(2)$ mittels der "ausintegrierten Terme" nach zweimaliger partieller Integration.

Hinweis. Integrieren Sie partiell in die "richtige" Richtung. Versuchen Sie nicht, numerische Werte für die Näherung zu finden.

(ii) Schätzen Sie den Fehler durch Abschätzung des verbliebenen Integrals ab.

Lösung

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi(2) &= \int_2^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_{x=2}^\infty - \int_2^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\cos 2}{2} - \frac{\sin x}{x^2}\bigg|_{x=2}^\infty - 2\int_2^\infty \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\cos 2}{2} + \frac{\sin 2}{4} - 2\int_2^\infty \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Die gesuchte Näherung für $\Phi(2)$ ist $\dfrac{\cos 2}{2} + \dfrac{\sin 2}{4}$.

(ii) Als Fehlerabschätzung erhalten wir

$$\left|\Phi(2) - \left(\frac{\cos 2}{2} + \frac{\sin 2}{4}\right)\right| \le \frac{1}{4},$$

da

$$2\left|\int_2^\infty \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x\right| \le 2\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=2}^\infty = \frac{1}{4}.$$

Bemerkung

Tatsächlich $\Phi(2) \approx -0{,}03462$ und $\dfrac{\cos 2}{2} + \dfrac{\sin 2}{4} \approx 0{,}01925$, sodass obige Nährung nicht besonders gut ist. Doch darum ging es nicht bei dieser Aufgabe.

Aufgabe 7 (Funktionenfolgen)

Die Funktionenfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $S_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei durch

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(1+x^2)^k}, \quad x\in\mathbb{R},$$

definiert.

(i) Zeigen Sie, dass

$$S_n(x) \longrightarrow \frac{1+x^2}{1+2x^2}, \quad n\to\infty$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig konvergiert.

Lösung

- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(1+x^2)^k}$.
- Für festes $x\in\mathbb{R}$ ist dies eine geometrische Reihe mit Absolutglied 1 und Quotienten $-\frac{x^2}{1+x^2}$.
- Wegen $\frac{x^2}{1+x^2}\le\frac{R^2}{1+R^2}<1$ für $|x|\le R$ gilt nach dem Weierstraßkriterium, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(1+x^2)^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{1+2x^2}$$

gleichmässig auf $[-R,R]$.

Aufgabe 8 (Potenzreihen)

(i) Zeigen Sie, dass

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

für $|x| < 1$.

(ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}\, x^{2k+3}.$$

Untersuchen Sie diese Reihe auch auf Konvergenz an den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Lösung

(i) Es gilt $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ für $|x| < 1$. Gliedweise Integration dieser Potenzreihe ergibt

$$-\log(1-x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x y^k \mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad |x| < 1,$$

und dies ist die Behauptung.

(ii)
- Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} (2^k/k)\, y^k$ hat wegen $\lim_{k\to\infty} \dfrac{2^{k+1}/(k+1)}{2^k/k} = 2$ den Konvergenzradius $1/2$.
- Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} (2^k/k)\, x^{2k+3}$ ist damit $1/\sqrt{2}$.
- Für $x = \pm 1/\sqrt{2}$ erhalten wir die Reihen $\pm\, 2^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$. Diese Reihen divergieren.