MI GAU-Göttingen **Scribed von: CPJ**
Analysis I – Sommerstudium **Vorlesung #14**
Dozent:in: Dr. Christian P. Jäh **04. September 2024**

Outline

Inhaltsverzeichnis

1. Fortsetzungssätze für stetige Funktionen

Es gibt verschiedene Klassen von Fortsetzungssätzen. Beispielsweise kann man, siehe Satz 2.57 in [Wit11], eine stetige Funktion $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq U \subseteq \mathbb{R}$ mit A abgeschlossen und U offen auf $\mathbb{R}$ so zu $\widetilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen, dass $\widetilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in A$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus U$. Dieser Satz heißt der Fortsezungssatz von Tietze. [Tie14] Wir beschäftigen uns mehr damit, wie man Funktionen auf kleinere Mengen fortsetzt. Beispielsweise wollen wir stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Das ist, womit wir uns hier beschäftigen.

In diesem Abschnitt ist nur Satz 1.6 relevant für die Klausur. Der Satz schließt Satz 1.1 ein.

1.1. Stetige Funktionen sind durch dichte Mengen bestimmt

Satz 1.1

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $D \subseteq I$ mit $\overline{D} = I$. Weiter seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \restriction D = g \restriction D$.

Beweis. Es sei $x \in I \setminus D$. Da D in I dicht ist, gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $x_n \to x$. Dann gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$$

wegen der Stetigkeit von f und g. □

Eine unmittelbare Folgerung ist

Folgerung 1.1

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f \restriction \mathbb{Q} = g \restriction \mathbb{Q}$.

Dann gilt $f = g$.

Damit können wir beispielsweise zeigen, dass exp, sin, cos eindeutig bestimmt sind. Siehe beispielsweise auch [Dei13] und [Heu09]. Wir diskutieren nur exp, da die anderen etwas aufwendiger sind. Für Sinus und Cosinus sind die Funktionalgleichungen die bekannten Additionstheoreme und die Werte an 0 sind bekannt wie im vorliegenden Satz.

Folgerung 1.2

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, stetig in $x_0 = 0$ und mit den Eigenschaften

(i) $f(1) = \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.[a]

(ii) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

Dann gilt $f = \exp$.

[a] Zur Definition der Eulerschen Zahl siehe Hausaufgabe 4.

Beweis. Das f auf ganz $\mathbb{Q}$ stetig ist folg in gleicher Weise wie für $r \mapsto \mathrm{e}^r$, $r \in \mathbb{Q}$ aus (ii) und der Tatsache, dass $f(q) = f(1)^q$ gilt. Da dann $f(1) = \mathrm{e} = \exp(1)$, also auch $f(q) = \exp(1)^q = \exp(q)$ gilt, folgt mit Folgerung 1.1, dass $f = \exp$ auf $\mathbb{R}$. □

Die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die bekannte Exponentialfunktion $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Im nächsten Abschnitt wird diese auf eine Art eingeführt über diese Fortsetzung eingeführt. Wir werden sie später durch Potenzreihen einführen. Nach dem letzten Satz, definieren beide Zugänge die gleiche Funktion.

1.1.1. Allgemeine Exponential- und Potenzfunktion

Die Darstellung hier folgt der in [Heu09], ist aber auch im wesentlichen die natürliche und man findet sie in einigen Büchern.

Wir wollen nun für $x \in (0, \infty)$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (den Fall $\alpha \in \mathbb{Q}$ haben wir) erklären. Bis jetzt wissen wir nicht, was $2^{\sqrt{2}}$ oder π^{e} oder ähnliches sein soll.

Dazu brauchen wir zuerst den folgenden Satz, der garantiert, dass für beliebiges $x \in (0, \infty)$, die Funktion $r \mapsto x^r$ auf $\mathbb{Q}$ stetig ist.

Satz 1.2

Es sei $x \in (0, \infty)$ fix und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ eine beliebige Folge mit $r_n \xrightarrow{n\to\infty} r \in \mathbb{Q}$.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^{r_n} = x^r.$$

Beweis. Da auch $x = 1$ nichts zu tun übrig lässt, könenen wir, ohne Verlust von Allgemeinheit, $x \neq 1$ annhemen. Wir bearbeiten die Fälle $r = 0$ und $r \neq 0$ getrennt.

- Zuerst sei $r \neq 0$. Wir zeigen, $x^{r_n} \xrightarrow{n\to\infty} a^0 = 1$.

  Wir wissen bereits, dass

$$\sqrt[n]{x} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

und mit

$$x^{-1/n} = \frac{1}{x^{1/n}}$$

gilt auch

$$x^{-1/n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit $|x^{1/n} - 1| < \varepsilon$ und $|x^{-1/n} - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Weiter existiert, da $r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : \quad -\frac{1}{N} < r_n < \frac{1}{N}.$$

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{Q}$ streng monoton[1] ist, können wir dann

$$\forall n \in \mathbb{N}, \geq n_0 : \quad x^{-1/N} < x^{r_n} < x^{1/N}.$$

schlussfolgern. Damit gilt dann auch $|x^{r_n} - 1| < \varepsilon$. Damit haben wir $x^{r_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

[1] Nachrechnen. Siehe Dazu V4 und V5. Weiter Satz 9.4 in [Heu09].

- Sei nun $r \neq 0$. Dann betrachten wir $r_n - r \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und erhalten durch

  $$x^{r_n} = x^{r_n - r} x^r \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot x^r = x^r$$

  aus den Rechengesetzen zusammen mit den Potenzgesetzen.

□

Unsere bisherige Diskussion legt also nahe x^α so zu definieren, dass $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ mit $r_n \to \alpha$ gewählt und

$$x^\alpha := \lim_{n\to\infty} x^{r_n} \tag{1}$$

gesetzt wird. Dazu haben wir zu zeigen, dass der Grenzwert rechts überhaupt existiert und das die Definition **wohldefiniert** ist also nicht von der gewählten Folge abhängt. Streng genommen definieren wir ja die Funktion nicht für eine Folge sondern für eine ganze Äquivalenzklasse und wir brauchen die **Repräsentantenunabhängigkeit**.

Bemerkung 1.1. *Wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$, dann stimmt die Definition in (1) mit der "alten" Definition überein.*

Nun führen wir unseren Plan aus uns zeigen, dass der Grenzwert rechts in (1) existiert. Dazu nutzen wir die Monotonie der Funktion $r \mapsto x^r$ aus.

Hilfssatz 1.1

Der Grenzwert (1) existiert und hängt nicht von der Wahl der Folge ab.

Beweis. Wir betrachten zuerst eine monotone Folge rationaler Zahlen und benutzen die monotone Konvergenz. Dann führen wir den allgemeinen Fall mit Satz 1.2 auf diese zurück.

- Zuerst sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ eine monoton wachsende Folge gegen α. Dann ist auch $(x^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Da $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist durch x^s für ein $s \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha \leq s$ ist auch die Folge $(x^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist die Folge also konvergent.

- Sei nun $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ eine beliebige Folge mit Grenzwert α. Dann ist $(s_n - r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und wir haben nach Satz 1.2, dass

  $$x^{s_n} = x^{s_n - r_n} \cdot x^{r_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot x^\alpha = x^\alpha$$

  nach den Überlegungen im ersten Punkt.

Wir sehen also, dass der Grenzwert stets existiert und von der Wahl der Folge sicherlich nicht abhängt. □

Damit ist unser Definition (1) gerechtfertigt und wir machen noch die Festsetzung $0^\alpha = 0$ für alle $\alpha \in (0, \infty)$. Um die Definition abzuschließen sollten wir noch die Rechengesetze nachprüfen.

Bemerkung 1.2. *Stoßen wir in der Zukunft in irgendeinem Zusammenhang auf den Ausdruck x^α und wird dabei über den Exponenten α nichts vorausgesetzt (darf er also irgendeine reelle Zahl sein), so nehmen wir immer stillschweigend die Basis x als positiv an!*

Wenn $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ vorliegen, dann haben wir mit entsprechenden rationalen Folgen $r_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ und $s_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$ dann

$$x^{r_n} x^{s_n} = x^{r_n + s_n} \xrightarrow{n\to\infty} x^{\alpha+\beta}.$$

Es gilt dann insbesondere auch $x^\alpha x^{-\alpha} = x^0 = 1$ und somit $x^\alpha \neq 0$. Da für alle rationalen Folgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stets $x^{r_n} \geq 0$ gilt, muss auch $x^\alpha \geq 0$ gelten und es gilt sogar $x^\alpha > 0$ nach dem Satz davor.

Aus $\frac{x^{r_n}}{x^{s_n}} = x^{r_n - s_n}$ ergibt sich mit $n \to \infty$, dann $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$. In gleicher Weise erhalten wir die Gleichungen $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$ und $\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$.

Nun noch ein paar Gedanken zur Monotonie. Sei $x < y$ (also $\frac{y}{x} > 1$), $\alpha > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < \alpha$.

Für alle hinreichend großen n gilt auch $r_n > r$ und damit für entsprechend große Indizes, die Ungleichung

$$1 = (y/x)^0 < (y/x)^r < (y/x)^{r_n}.$$

Mit $n \to \infty$ erhalten wir dann[2]

$$1 < (y/x)^\alpha.$$

Damit $x^\alpha < x^\beta$. Ist $\alpha < 0$, so haben wir $-\alpha > 0$ und damit $\frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{y^\alpha}$ was $y^\alpha < x^\alpha$ gibt. Damit ist die Funktion $x \mapsto x^\alpha$ auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend ($\alpha > 0$) oder streng monoton fallend ($\alpha < 0$).

Aus dem Gesagten ergibt sich weiter, dass für $x > 1$ und $\alpha < \beta$ die Ungleichung

$$1 = 1^{\beta-\alpha} < x^{\beta-\alpha} = \frac{x^\beta}{x^\alpha}$$

gilt, also $x^\alpha < x^\beta$ gilt. Wenn $x \in (0, 1)$ ist, dann folgt damit wiederum

$$\frac{1}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha < \left(\frac{1}{x}\right)^\beta$$

und damit $x^\beta < x^\alpha$.

Damit haben wir den Satz

Satz 1.3

Die Potenz und die Exponentialfunktion haben die Folgenden Eigenschaften:

(i) Die **Potenzfunktion** $x \mapsto x^\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) ist auf $(0, \infty)$ positiv und streng monoton wachsend für $\alpha > 0$ beziehungsweise streng monoton fallend für $\alpha < 0$.

(ii) Die **Exponentialfunktion** $x \mapsto \alpha^x$, ($\alpha \in (0, \infty)$) ist auf $\mathbb{R}$ positiv und streng monoton wachsend für $x > 1$ beziehungsweise streng monoton fallend für $0 < x < 1$.

[2] Den Fuß in der Tür mit dem r brauchten wir damit wir eine Ungleichung echt erhalten konnten. Grenzwerte respektieren nur $\leq$ nicht $<$.

Damit kann man, dem Beweis von Satz 1.2 folgend den folgenden Satz beweisen, die Stetigkeit der Exponentialfunktion.

Satz 1.4

Es sei $x \in (0, \infty)$.

Dann gilt für alle Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, dass $x_n^\alpha \xrightarrow{n\to\infty} x^\alpha$.

Nun sind wir abschließend in der Lage, auch noch die Potenzregel $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ zu beweisen. Es gilt für k stets

$$\left(x^{r_n}\right)^{s_k} \xrightarrow{n\to\infty} \left(a^\alpha\right)^{s_k}$$

und wegen

$$(x^{r_n})^{s_k} = x^{r_n s_k}$$

aber auch $\xrightarrow{n\to\infty} x^{\alpha s_k}$, also ist

$$\left(x^\alpha\right)^{s_k} = x^{\alpha s_k}$$

Für $k \to \infty$ folgt daraus mit Satz 1.4 die behauptete Gleichung

$$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Zusammenfassend haben wir also, dass die aus der Schule geläufigen Potenzregeln auch für Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten gelten.

1.2. Fortsetzung monotoner Funktionen

Für einen konkreten Zugang zu den allgemeinen Potenz und Exponentialfunktionen über monotone Funktionen und ihre Fortsetzung, siehe [Dei13].

Satz 1.5

Es sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend. Für $x, y \in Q$ mit $f(x) < f(y)$ existiert stets ein $r \in Q$ mit $f(x) < f(r) < f(y)$.

Dann besitzt f eine eindeutige monotone wachsende Fortsetzung $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\widetilde{f}(x) = \sup_{\substack{r\in Q\\ r<x}} f(r) = \inf_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r>x}} f(r).$$

Entsprechend gilt der Satz für monoton fallende Funktionen.

Aufgabe 1.1. *Beweise Satz 1.5. Benutze dann diesen Satz um die allgemeine Potenzfunktion zu definieren.*

1.3. Fortsetzung gleichmäßig stetiger Funktionen

Satz 1.6: Fortsetzungssatz

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Dann existiert eine stetige Funktion $\widetilde{f} : \bar{I} \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{f} \restriction I = f$. Die Funktion $\widetilde{f}$ ist eindeutig bestimmt.

Bemerkung 1.3. *Die gleichmäßige Stetigkeit kann im allgemeinen nicht weggelassen werden. Die Menge* $(0,\infty)$ *ist dicht in* $[0,\infty)$ *aber die Funktion* $f\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ *hat keine stetige Fortsetzung auf* $[0,\infty)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Zuerst definieren wir einen Kandidaten für das $\tilde{f}$. Dann zeigen wir, dass dieser die gewünschten Eigenschaften hat.

- Sei $x\in\bar{I}\setminus I$. Dann ist x Häufungspunkt von I. Damit gibt es eine Folge $\{x_n\}\subset I$ mit $x_n\to x$ für $n\to\infty$. Da f auf I gleichmäßig stetig ist, ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge wegen Satz 1.1 in V13.
- Wir zeigen jetzt, dass $\tilde{f}$ **wohldefiniert** ist, d.h. dass $\tilde{f}(x)$ für $x\in\bar{I}\setminus I$ unabhängig von der Wahl der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset I$ eine weitere Folge, die gegen x konvergiert. Dann konvergiert die Folge
$$x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,\ldots$$
gegen x, also konvergiert nach dem ersten Punkt auch die Folge
$$f(x_1),f(y_1),f(x_2),f(y_2),f(x_3),f(y_3),\ldots$$
und die beiden Folgen
$$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\quad\text{und}\quad(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$$
haben denselben Grenzwert.
- Die Eindeutigkeit der Funktion $\tilde{f}$ folgt aus Satz 1.1.

□

2. Differenzialrechnung

2.1. Motivation

Wir betrachten den Graph einer schönen[3] Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, beispielsweise ein Polynom. Wir stellen uns die Aufgabe eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $x_0\in\mathbb{R}$ zu finden. Wie Sie aus der Schule wissen starten wir mit einer Sekante durch die Punkte $(x_0,f(x_0))$ und $(x_1,f(x_1))$, $x_1=x_0+h$. Der Anstieg der Sekante ergibt sich zu

[3] Wie nehmen an, dass die Funktion alle Eigenschaften hat die wir brauchen. Vor allem ist sie im anschaulichen Sinne "glatt".

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\quad x_1\neq x_0$$

und damit erhalten wir als Sekantengleichung

$$\begin{aligned}s(x)&=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0),\quad x_1\neq x_0,\\&=f(x_0)+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0).\end{aligned}$$

Da wir wissen, was es bedeutet Grenzwerte von Funktionen zu bestimmen, können wir unter Verwendung der Rechenregeln für Grenzwerte untersuchen, was mit s passiert, wenn $h\to 0$. Wir sehen, dass, das Kriterium für die Existenz einer Tangente die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ist. Diese Beobachtung werden wir zur Definition von Differenzierbarkeit im Punkt x_0 machen.

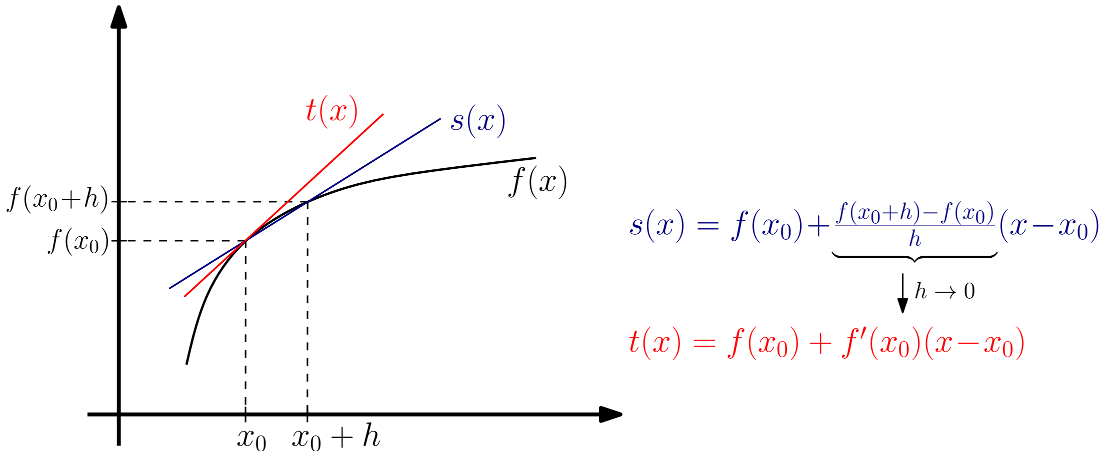


Abbildung 1: Darstellung der Sekante und der Tangente.

2.2. Definition Differentialquotient

Damit eine Ableitung einer Funktion f im Punkts x_0 existiert, also eine wohldefinierte Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion im Punkt $(x_0, f(x_0))$ muss also der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existieren. Damit haben wir die Definition der Differenzierbarkeit mit Hilfe des Differentialquotienten.

Definition 2.1: Differenzierbarkeit

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I^\circ$.

(i) Die Funktion f heißt genau dann **differenzierbar** in x_0, wenn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Der Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.[a]

(ii) Wenn das Intervall $J \subseteq I$ alle Punkte enthält in denen die Funktion f differenzierbar ist, dann heißt die Funktion $f' : J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ **Ableitung** von f.

(iii) Für $x \in I \setminus \{x_0\}$ heißt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Differenzenquotient und

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

heißt **Differentialquotient** ; letzterer wird auch mit $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

[a] Insbesondere in Analysis 2, werden wir auch $Df(x_0)$ schreiben.

Bemerkung 2.1. *Statt der Ableitung können wir auch* ***einseitige Ableitungen*** *betrachten, d.h. Grenzwerte*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \pm h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Wir bezeichnen diese dann, beispielsweise, mit $f'^{\pm}(x_0)$ oder $D^{\pm}f(x_0)$. Wenn wir sagen, dass $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann meinen wir in $x_0 = a$ und $x_0 = b$ die rechts- beziehungsweise linksseitige Differenzierbarkeit.

2.3. Charakterisierung der Differenzierbarkeit

Wir haben die Differenzierbarkeit einer Funktion über den sogenannten Differentialquotienten charakterisiert. Wir werden diese Definition auch hier und da verwenden, sollten uns aber weitere Charakterisierungen verschaffen. Zum einen wird das helfen Ableitungen beziehungsweise Differenzierbarkeit besser zu verstehen und zum anderen ersparen einige der Regeln Rechenarbeit. Beispielsweise ist der Nachweis der Arithmetischen Regeln für Ableitungen nur algebraische Arbeit, wenn man (iii) verwendet.

Satz 2.1: Charakterisierung Differenzierbarkeit

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$.

Dann sind die Folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist differenzierbar in x_0.

(ii) Es existiert eine Funktion $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, stetig in x_0 mit

$$\boxed{\forall x \in (a,b)\colon \quad f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0).}$$

(iii) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion

$$\psi\colon (a,b) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x)}{x - x_0} = 0$$

mit

$$\boxed{\forall x \in (a,b)\colon \quad f(x) = f(x_0) + c\,(x - x_0) + \psi(x).}$$

(Dann gilt $c = f'(x_0)$.)

Wir sagen, dass $f = o(g)$, für $x \to x_0$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Leicht allgemeinere Fassungen sind möglich, aber die brauchen wir vorerst nicht. Damit kann man (iii) in

$$f(x+h) = f(x) + ah + o(h)$$

umformulieren und wir ersparen uns in Rechnungen dem φ jedes Mal einen adäquaten Namen zu geben.

Beispiel 2.1. *Wir zeigen, dass $x \mapsto x^2$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit c). Dazu zei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x \neq x_0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} x^2 &= x_0^2 + c(x - x_0) + x^2 - c(x - x_0) - x_0^2 \\ &= x_0^2 + c(x - x_0) + \psi(x). \end{aligned}$$

Es muss gelten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2 - c(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x + x_0 - c) = 2x_0 - c = 0$$

also muß $c = 2x_0$ sein und damit ist alles ausgerechnet.

Warnung: Man darf sich von leicht nachrechenbaren Beispielen wie dem oben nicht über die Geschwindigkeit täuschen lassen, mit der ψ verschwindet wenn $x \to x_0$. Man weis nur, dass

$$\frac{\psi(x)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} 0$$

gilt. Das kann aber beliebig langsam sein! Wir werden später, mit dem Satz von Taylor, detaillierter auf diesen Fehlerterm eingehen, wenn die Funktion mehr als eine Ableitung besitzt.

Wir zeigen $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$:

$a) \Rightarrow b)$ Sei also f in x_0 differenzierbar. Für $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ haben wir

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f(x) - f(x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0). \end{aligned}$$

Wir setzen also

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & : \quad x \neq x_0 \\ f'(x_0) & : \quad x = x_0. \end{cases}$$

Da f in x_0 differenzierbar ist gilt $\varphi(x) \xrightarrow{x\to x_0} \varphi(x_0)$, d.h. φ ist stetig in x_0.

$b) \Rightarrow c)$ Wir haben φ wie in b) angegeben und rechnen für $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \varphi(x)(x-x_0) \\ &= f(x_0) + \varphi(x_0)(x-x_0) + \varphi(x)(x-x_0) - \varphi(x_0)(x-x_0). \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\psi(x) := \varphi(x)(x-x_0) - \varphi(x_0)(x-x_0).$$

Es bleibt zu sehen, dass $\frac{\psi(x)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} 0$: $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$

$$\frac{\psi(x)}{x-x_0} = \frac{\varphi(x)(x-x_0) - \varphi(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \varphi(x) - \varphi(x_0) \xrightarrow{x\to x_0} 0$$

da φ in x_0 stetig ist. Das gesuchte a ist also $\varphi(x_0)$.

$c) \Rightarrow a)$ Es gelte nun also c), d.h. wir haben ein ψ mit den gegebenen Eigenschaften, insbesondere

$$f(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + \psi(x).$$

Für $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ haben wir dann

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a + \frac{\psi(x)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} = a.$$

Damit ist der Differentialquotient endlich und die Differenzierbarkeit gezeigt.

2.4. Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Satz 2.2

Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Sei f in x_0 differenzierbar.

Dann ist f stetig in x_0.

Beweis. Da

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h)$$

gilt folgt

$$f(x_0+h)-f(x_0)=o(1)$$

also ist f stetig in x_0. □

Aufgabe 2.1. *Benutze die anderen Charakterisierungen der Differenzierbarkeit um die Stetigkeit nachzuweisen.*

2.5. Ableitungen transzendenter Funktionen

Die folgenden Ableitungen können beim Rechnen ohne weitere Begründung benutzt werden. Wir werden die entsprechenden Begründungen liefern, wenn wir die notwendigen Werkzeuge besitzen.

Funktion	Ableitung
c, $c\in\mathbb{R}$	0
x^n, $n\in\mathbb{Z}$ ($x\neq 0$ wenn $n\leq -1$)	nx^{n-1}
x^α, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>0$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$1+\tan^2(x)$
$\cot(x)$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}=-(1+\cot^2(x))$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$, $x\in(0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x
a^x	$\log(a)a^x$
$\log(\lvert x\rvert)$, $x\neq 0$	$\frac{1}{x}$

3. Rechenregeln für Ableitungen

Satz 3.1: Arithmetische Rechenregeln

Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ und f und g differenzierbar. Dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Für $\frac{f}{g}$ gelten die notwendigen Voraussetzungen $g(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0.

Wenn wir nun Funktionen wie $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ auf ihrem Definitionsbereich ableiten wollen, so wollen wir dies nicht immer per Hand tun sondern Informationen über $x \mapsto x^n$ und $x \mapsto \sqrt{x}$ ausnutzen. Dazu brauchen wir eine Regel für die Verkettung von Funktionen.

Satz 3.2: Kettenregel

Es sei ein $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f: I \to J$ und $g: J \to \mathbb{R}$ wobei f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar sind.

Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0))f'(x_0).}$$

3.1. Einige Überlegungen zur Produktregel

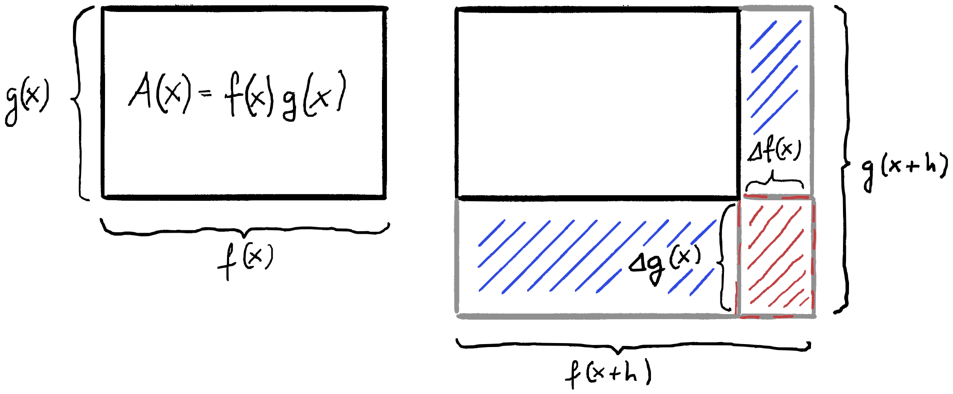
Die Produktregel ist oft schon aus der Schule bekannt und darum wird von Anfängern oft kein Abstraktionsfehler von der Summen- zur Produktregel gemacht. Man könnte ja durchaus annhemen, dass wenn die Ableitung einer Summe die Summe der Ableitungen ist, dass auch die Ableitung eines Produktes das Produkt der Ableitungen ist also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = f'(x)g'(x)$$

gilt. Dies ist aber nicht der Fall. Es gilt statt dessen die kompliziertere Formel

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).}$$

Die richtige Formel anzugeben geschieht hier eher aus "Vorwissen"- als aus Verständnisgründen. Man hat euch halt gesagt, was die richtige Formel ist. Wir wollen aber nicht nur wissen was die richtige Formel ist und bewiesen das sie richtig ist, sondern wir wollen auch verstehen, wieso es nicht anders sein kann. Natürlich kann man dieses Gefühl auch aus Beweisen bekommen aber der Beweis für die Produktregel gehört nicht dazu. Man braucht einen ähnlichen "Trick" wie bei den Produktregeln für Grenzwerte von Folgen. Die nachfolgend diskutierte grafische Interpretation gibt einem aber auch diesen "Trick" vor.



$$
\begin{aligned}
A(x+h) &= f(x+h)\,g(x+h) \\
&\stackrel{!}{=} f(x)g(x) + f(x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x) \\
&\quad + \Delta g(x)\Delta f(x)
\end{aligned}
$$

Abbildung 2: Illustration der Produktregel.

3.2. inige Überlegungen zur Kettenregel

Die Schwierigste der Rechenregeln ist die sogenannte Kettenregel. Auch diese ist aus der Schule bekannt also

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)}$$

und wird eher nicht als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g'(x))$$

angenommen. Aber auch hier ist dies eher der Fall weil man gesagt bekommen hat, was die richtige Formel ist und nicht weil man versteht, dass die richtige Formel die richtige Formel ist. Da wir hier, wie schon in meiner Diskussion der Produktregel erwähnt, auch einige zukünftige Lehrer:innen ausbilden, wollen wir dies ein wenig genauer beleuchten.

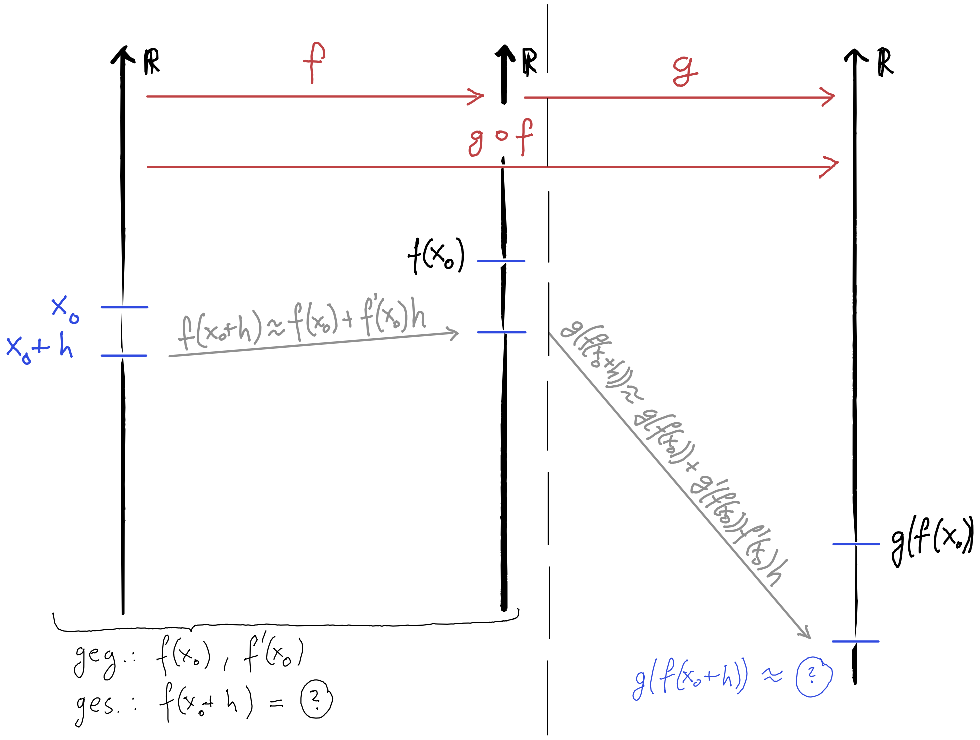


Abbildung 3: Illustration der Kettenregel. Wir brauchen dazu nur wissen, dass $f(x+h) \approx f(x)+f'(x)h$ und $g(y+k) \approx g(y)+g'(y)k$ ist. Dann folgt die Kettenregel mit $y=f(x)$ und $k=f'(x)h$.

3.3. Klein-o-Beweis der Kettenregel

Wir haben nach Charakterisierung der Differenzierbarkeit die folgenden Formeln

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\mathrm{o}(h)$$

und

$$g(y+k)=g(y)+g'(y)k+\mathrm{o}(k).$$

Dann erhalten wir für die Verkettung,

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &= g\big(f(x)+f'(x)h+\mathrm{o}(h)\big) \\ &= g(f(x))+g'(f(x))(f'(x)h+\mathrm{o}(h))+\mathrm{o}(f'(x)h+\mathrm{o}(h)). \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$g'(f(x))(f'(x)h+\mathrm{o}(h)) = g'(f(x))f'(x)h+g'(f(x))\mathrm{o}(h)$$

wobei

$$g'(f(x))\mathrm{o}(h)=\mathrm{o}(h)$$

gilt. Der Term $\mathrm{o}(f'(x)h+\mathrm{o}(h))$ soll nun eine Größe $\varphi(h)$ für die

$$\frac{\varphi(h)}{h} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

gelten soll. Wir brauchen dazu, dass

$$f'(x_0)h+\mathrm{o}(h) \approx h$$

gilt. Das haben wir, da

$$f'(x)h+\mathrm{o}(h)=h\left(f'(x_0)+\frac{\mathrm{o}(h)}{h}\right).$$

Da $\frac{\mathrm{o}(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$, können wir $f'(x)h+\mathrm{o}(h)$ zwischen $h(f'(x_0)-\varepsilon)$ und $h(f'(x_0)+\varepsilon)$ einschließen. Da $\mathrm{o}(Ch)=\mathrm{o}(h)$ ist, haben wir alles gezeigt.

3.4. Elementarer Beweis der Kettenregel

Wenn $g(x) - g(x_0) \neq 0$, dann können wir schreiben

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

Wir zerlegen nun den Rest des Beweises in zwei Fälle.

I Angenommen, es existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ so daß $g(x) = g(x_0)$. Wenn wir eine solche Folge wählen, dann gilt

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

Da g in x_0 differenzierbar ist, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

existiert (und ist eindeutig), bekommen wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{3}$$

Nun sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ eine Folge mit $(x_n) \to x_0$ für $n \to +\infty$. Wir können $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nun in zwei Teilfolgen $(x_{n_l})_{l \in \mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g(x_{n_l}) = g(x_0)$ und $g(x_{n_k}) \neq g(x_0)$ aufteilen.[4] Damit erhalten wir dann

$$\lim_{l \to +\infty} \frac{f(g(x_{n_l})) - f(g(x_0))}{x_{n_l} - x_0} = 0.$$

Für $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ können wir (2) benutzen um

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \to +\infty} \frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(x_0))}{x_{n_k} - x_0} \\
&\quad = \lim_{k \to +\infty} \frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(x_0))}{g(x_{n_k}) - g(x_0)} \frac{g(x_{n_k}) - g(x_0)}{x_{n_k} - x_0} \\
&\quad = \lim_{k \to +\infty} \frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(x_0))}{g(x_{n_k}) - g(x_0)} \cdot \lim_{k \to +\infty} \frac{g(x_{n_k}) - g(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0
\end{aligned}$$

zu erhalten wobei wir auch (3) verwenden. Damit haben wir endlich

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(g(x_n)) - f(g(x_0))}{x_n - x_0} = 0.$$

Damit ist der Fall I erledigt.

II Angenommen es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $g(x) \neq g(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Dann folgt die Aussage durch den Grenzwert $x \to x_0$ auf beiden Seiten von (2) und den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen.

[4] Eine der Folgen könnte “leer” sein, das stört das Argument aber nicht. Klar?

A. Weierstraß’ Beispiel einer nirgends differenzierbaren Funktion

Literatur

[Dei13] Oliver Deiser. *Analysis 1*. Math. Lehramt. Heidelberg: Springer Spektrum, 2nd revised and expanded ed. edition, 2013.

[Heu09] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 17th revised ed. edition, 2009.

[Tie14] H. Tietze. Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind. *J. Reine Angew. Math.*, 145:9–14, 1914.

[Wit11] Ingo Witt. *Differenzial- und Integralrechnung I*. Vorlesungsskript GAUG, 2011. https://www.uni-math.gwdg.de/iwitt/Skript.pdf.