Inhaltsverzeichnis

Wir haben im letzten Kapitel verstanden, wie man zu einer Funktion f, die auf einem Intervall (a, b) definiert ist, die Ableitung bestimmen kann (sofern diese existiert). Jetzt widmen wir uns der umgekehrten Fragestellung. Gegeben sei die Ableitung $f' = g$ auf (a, b) und zu bestimmen sind alle Funktionen f mit $f' = g$. Wir verwenden jetzt für die gegebene Ableitung das Symbol f und für die zu bestimmenden Funktionen das Symbol F.

Aus den Ableitungsregeln ergeben sich sofort die folgenden Beispiele: alle Funktionen sind auf ihrem natürlichen Definitionsbereich zu verstehen.

- $f(x) = x^n$, somit $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, wobei c eine beliebige Konstante ist;
- $f(x) = a^x$, somit $F(x) = \frac{1}{\log(a)}a^x + c$;
- $f(x) = |x|$, somit $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \mathrm{sign}(x) + c$

Definition 0.1: Stammfunktion

Gegeben sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Jede Funktion $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ heißt **Stammfunktion** von f auf (a, b).

Frage: Wie ergibt sich die Menge aller Stammfunktionen?

Definition 0.2: Unbestimmtes Integral

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt unbestimmtes Integral. Es wird mit

$$\boxed{\int f(x)dx}$$

bezeichnet.

Es gilt

$$\int (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))\, dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \cdots + c_n \int f_n(x)dx$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, \cdots, c_n$.
Weiterhin gilt:

$$\boxed{\int \frac{df}{dx}dx = f + c}$$

und

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)dx = f}$$

Wir können also die unbestimmte Integration als eine Art Umkehrung der Differentiation ansehen.

Funktion	Unbestimmtes Integral ($c \in \mathbb{R}$)
0	c,
x^α, $\alpha \neq -1$, $x > 0$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
e^x	$\mathrm{e}^x + c$
a^x, $a \in (0,\infty)\backslash\{1\}$	$\frac{a^x}{\log(a)} + c$
$\frac{1}{x}$, $x > 0$	$\log(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$	$\arcsin(x) + c$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$	$\arccos(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$

1. Substitution für unbestimmte Integrale

Die sogenannte Substitutionsregel ist die Umkehrung der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Sie kommt in zwei Formen.

1. Es seinen f und g gegebene Funktionen mit $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Weiterhin sei φ differenzierbar. Falls f eine Stammfunktion F besitzt, dann besitzt auch $f(g)g'$ eine Stammfunktion und es gilt:

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x)) + c.}$$

   Das diese Formel stimmt rechnen wir einfach nach,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

2. Unter den gleichen Voraussetzungen von Regel 1 sei $g'(x) \neq 0$. Dann existiert die Umkehrfunktion g^{-1}. Dann schreiben wir $x = g(t)$ beziehungsweise $t =$

$g^{-1}(x)$. Wenn auf dom(g) gilt

$$\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = \Phi(t),$$

dann gilt

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = \Phi(g^{-1}(x)) + C.}$$

Auch hier rechnen wir einfach nach, dass die Stammfunktion stimmt.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(g^{-1}(x)) &= \Phi'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)\\ &= \Phi'(t)\frac{1}{g'(t)}\\ &= \frac{f(g(t))g'(t)}{g'(t)} = f(g(t)) = f(x).\end{aligned}$$

Beispiel 1.1. *Zu berechnen ist*

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x \quad \textit{mit} \quad r > 0, x \in (-r, r).$$

Wir verwenden die Substitution:

$$x = r\sin(t), \quad t \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$$

und damit

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right), \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = r\cos(t), \quad \mathrm{d}x = r\cos(t)\mathrm{d}t$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - x^2}dx &= \int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t dt\\ &= r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt = r^2 \int \cos^2 t dt\\ &= r^2 \int \frac{\cos(2t)t + 1}{2}dt\\ &= \frac{1}{2}r^2 \int \cos(2t)dt + \frac{1}{2}r^2 \int 1dt\\ &= \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2}r^2 t + c\\ &= \frac{1}{2}r^2 \sin t \cdot \cos t + \frac{1}{2}r^2 t + c\\ &= \frac{1}{2}r^2 \frac{x}{r}\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2}} + \frac{1}{2}r^2 \arcsin\frac{x}{r} + c\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2}r^2\arcsin\frac{x}{r} + c\end{aligned}$$

Ein paar spezielle Folgerungen:

- $$\int f(ax + b)\mathrm{d}x = \frac{F(ax + b)}{a} + c$$

- Das folgende Integral ist oft hilfreich und man sollte trainieren auch danach ausschau zu halten.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \log|f(x)| + c$$

  Streng genommen ist die Formel nicht korrekt, da die Konstante auf der Menge mit $\pm f(x) > 0$ verschieden sein kann. Das sich Stammfunktionen nur durch Konstanten unterscheiden gilt nur auf Intervallen.

-

$$\int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + c.$$

1.1. Partielle Integration für unbestimmte Integrale

Partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel für Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integration liefert

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x.}$$

Wenn wir also das Integral $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ kennen, dann kennen wir auch das Integral $\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$. Wenn man ein Integral $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ vorgelegt hat, dann entscheidet man, welche Funktion integriert und welche differenziert wird je nach dem ob das Integral $\int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ oder $\int f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x$ auf der rechten Seite einfacher wird.

Die partielle Integration kann beispielsweise genutzt werden um Integrale der Form

$$\int P_n(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x, \quad \int P_n(x)\sinh(ax)\,\mathrm{d}x, \quad \int P_n(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x,$$

und

$$\int P_n(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x, \int P_n(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$$

zu bearbeiten wobei P_n ein Polynom vom Grad n bezeichnet. Da P_n' ein Polynom P_{n-1} vom Grad $n-1$ ist wendet man partielle Integration so oft an, bis das Polynom nur noch eine Konstante ist, also n mal.

Beispiel 1.2.

$$\begin{aligned}\int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x^3\mathrm{e}^x - \int 3x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + \int 6x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\ &= (x^3 - 2x^2 + 6x - 6)\mathrm{e}^x + c.\end{aligned}$$

Beispiel 1.3.

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin(x)\mathrm{d}x &= -x^3\cos(x) - \int (-\cos(x))3x^2\mathrm{d}x\\ &= -x^3\cos(x) + 3\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x\\ &= -x^3\cos(x) + 3\left(x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - 6\int x\sin(x)\mathrm{d}x\\ &= -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - 6\left(-x\cos(x) - \int -\cos(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) + 6x\cos(x) - 6\int \cos(x)\mathrm{d}x\\ &= -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) + 6x\cos(x) - 6\sin(x) + c\end{aligned}$$

2. Probleme mit unbestimmten Integral

Beispiel 2.1. *Wir haben*

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= x\frac{1}{x} - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= 1 + \int\frac{\mathrm{d}x}{x}.\end{aligned}$$

Ist das ein Widerspruch? Das scheint doch zu heißen, dass $0 = 1$*?!*

A. Die LIATE Regel

Dieser Abschnitt basiert auf [Kas83] und richtet sich vor allem auch an unsere zukünftigen Lehrer:innen. Nur wenn Sie die Techniken verstehen, können man sie auch lehren. Das bedeutet nicht, dass ihr jedes Integral berechnen können müssen, dass man euch vorlegt. Aber ihr solltet Strukturen sehen; beispielsweise

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \log(|f(x)|) + C}$$

oder allgemeiner

$$\boxed{\int f'(x)g(f(x))\,\mathrm{d}x = G(f(x)) + C, \quad G' = g.}$$

Bezüglich partieller Integration lassen sich auch ein paar Guidelines angeben. Viele Studierende mögen sich diese durch Übung selbst erschließen können, etliche aber auch nicht. Beide können von einem formalen Review profitieren.

In den USA wird die LIATE-Regel in den *High Schools* schon seit geraumer Zeit unterrichtet. Nach Deutschland hat Sie sich, abgesehen von einigen Youtube-Kanälen bis jetzt nicht im Schulbetrieb wiedergefunden. Wie alle Regeln sollte man sich nicht zu sehr an sie klammern, aber im allgemeinen funktioniert das schon. Also, worum geht es? Wenn wir auf $\int f'g\,\mathrm{d}x$ partielle Integration anwenden, so ist das nur sinnvoll, wenn $\int fg'\,\mathrm{d}x$ in sinnvoller Weise einfacher wird. Man muss also entscheiden, welche Funktion abgeleitet werden soll.

Angenommen wir haben $\int \log(x)\mathrm{d}x$. Um partielle Integration anzuwenden erkennt man, dass das Integral natürlich das gleiche ist wie $\int 1 \cdot \log(x)\mathrm{d}x$. Da die Ableitung von $x \mapsto \log(x)$ einfach $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist, sollten wir natürlich log ableiten. Wir erhalten

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\log(x) - x + C.$$

Und genauso wissen wir, dass die Ableitung der inversen trigonometrischen Funktionen einfacher ist als die inversen trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} x \mapsto \arctan(x) &\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \\ x \mapsto \arcsin(x) &\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ x \mapsto \arccos(x) &\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Folglich würden wir wohl $\int \arctan(x)\mathrm{d}x$ wie oben angehen

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Das rechte Integral ergibt sich durch Substitution oder scharfes ansehen[1], da

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(|1+x^2|)$$

also

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(|1+x^2|) + C.$$

Die Priorität der Funktionen, beispielsweise in $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int \log(x)\sinh(x)\,\mathrm{d}x$ wird durch folgende Regel, LIATE, angegeben:

- L Logarithmen,
- I Inverse trigonometrische Funktionen,
- A Algebraische Funktionen,
- T Trigonometrische Funktionen
- E Exponentialfunktionen (schließt sinh und cosh ein).

In den Übungsaufgaben habe ich Ihnen ja schon eine lange Liste an Beispielen gegeben. Hier erledigen wir nochmal ein paar.

- Wir beginnen mit **L**. Wir berechnen[2]

$$\begin{aligned} \int x\log(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{1}{4}x^2 + C. \end{aligned}$$

  Viel andere Beispiele dieser Art kann man gar nicht vorlegen. Integrale der Form $\int p(x)\log(x)\,\mathrm{d}x$ für ein Polynom p sind wie oben mit partieller Integration berechenbar. Das Integral $\int P\log'(x)\,\mathrm{d}x$[3] ist dann einfach, da es sich wie in den beiden obigen Beispielen nur noch um ein Polynom handelt. Integrale wie $\int \log(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ sind nicht elementar[4] berechenbar, da $\int \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ nicht elementar ist. Die letztere Funktion heißt Integralsinus und wird mit Si bezeichnet.

[1] Die Regel hier ist

$$\int \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}x = \log(|f|) + C$$

.

[2] Hier kommt L und A vor. Da aber L vor A kommt, leiten wir log ab.

[3] Es gilt $P' = p$.

[4] Elementar bedeutet, dass die Stammfunktion als rationale Funktion in sin, cos, log, tan und ihren Umkehrfunktionen geschrieben werden kann.

- Schauen wir auf **I**. Untersuchen wir[5]

$$\int x \arcsin(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arcsin(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Hier kommen wir nun zu einem schwereren Fall bezüglich partieller Integration. Wir müssen uns dazu ansehen, was wir integrieren können. (Bevor du weiter liest, solltest du es selbst versuchen.)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int x \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Das kann man nun leicht mir partieller Integration behandeln. Beide Funktionen sind algebraisch aber Polynome sind einfacher als Wurzeln. Weiter gilt nach Substitution

$$\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C.$$

Den Rest zusammenzusetzen überlasse ich Ihnen.

[5]Nach LIATE ist wieder I vor A also werfen wir die Ableitung auf $\arcsin$.

- Kommen wir zu **A**. Am Ende von **I** hatten wir schon ein Beispiel und es ist klar, dass man machen Integrale mit einer Mischung von Regeln angreifen muss.[6] Betrachten wir

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int x \cdot 2x\sqrt{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{x}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{3}\int (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Das zweite Integral ist etwas schwerer und verlangt wohl nach Integration durch Substitution. Wir erinnern uns, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ also insbesondere $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$.[7] Wir setzen $x = \sinh(y)$ also $dx = \cosh(y)dy$. Damit

$$\int (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \cosh^4(y)dy.$$

Wenn ich mich nicht verrechnet habe (nachrechnen!), gilt

$$\cos^4(y) = \frac{1}{8}\cosh(4y) + \frac{1}{2}\cosh(2x) + \frac{1}{2}$$

und das integriert man leicht. Vergessen Sie nicht die Substitution dann umzukehren.

[6]Nicht nur verschiedene LIATE-partielle Integrationen aber auch Substitution.

[7]Wenn Sie das Gefühl haben, dass eine Trig-Substitution funktionieren könnte, aber Vorzeichen irgendwie off sind, dann kann man hyperbolische Funktionen versuchen. Wann hat man das Gefühl, dass eine Trig-Substitution funktionieren könnte? Ich versuche zu sehen ob irgendwo 'Pythagoras' vorkommt. Beispielsweise in $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ steht ein Ausdruck unter der Klammer, der nach Pythagoras riecht: $1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)$ ...

- Unter **T** fallen Integrale wie $\int \sin(x)e^x\,dx$ und $\int p(x)\sin(x)\,dx$ natürlich auch mit cos und $\tan$ und anstatt der Exponentialfunktion auch die hyperbolischen Funktionen. Rechnen wir schnell ein Beispiel

$$\begin{aligned}\int \cos(x)\sinh(x)\,dx &= \cos(x)\cosh(x) + \int \sin(x)\cosh(x)dx \\ &= \cos(x)\cosh(x) + \sin(x)\sinh(x) \\ &\quad - \int \cos(x)\sinh(x)\,dx\end{aligned}$$

also

$$\int \cos(x)\sinh(x)\,dx = \frac{1}{2}(\cos(x)\cosh(x) + \sin(x)\sinh(x)) + C.$$

Dieses Verhalten ist für solche Integrale typisch!

- Es bleibt **E**. Hier haben wir meißt nur Integrale der Form $\int p(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ (p Polynom vom Grad n). Beispiel: $a \neq 0$

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax+b} - \frac{2}{a}\int x\mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax+b} - \frac{2}{a^2}x\mathrm{e}^{ax+b} + \frac{2}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax+b} - \frac{2}{a^2}x\mathrm{e}^{ax+b} + \frac{2}{a^3}\mathrm{e}^{ax+b}\\ &= \frac{1}{a^3}\left(a^2x^2 - 2ax + 2\right)\mathrm{e}^{ax+b} + C.\end{aligned}$$

Literatur

[Kas83] Herbert E. Kasube. The Teaching of Mathematics: A Technique for Integration by Parts. *Amer. Math. Monthly*, 90(3):210–211, 1983.