
Outline

Inhaltsverzeichnis

1 Gleichheit

Wie zeigt man, dass zwei Objekte gleich sind?

Grundlage dazu sind Ordnungsrelationen. Gegeben eine geordnete Menge $(M, \leq)$, dann folgt die Gleichheit zweier Elemente $x, y \in M$ dieser Menge aus der Antisymmetrie der Ordnungsrelation.

- Es sei X eine Menge. Dann ist $\mathcal{P}(X)$ durch die Teilmengenrelation $\subseteq$ geordnet. Um die Gleichheit zweier Mengen $M, N \subseteq X$ zu beweisen ist es also meist sinnvoll $M \subseteq M \wedge M \subseteq N$ zu beweisen.
- Auf den reellen Zahlen haben wir eine strikte Ordnung $<$ (irreflexiv, transitiv) und eine **Trichotomie**. Diese sagt, dass für je zwei reelle Zahlen genau einer der Aussagen $x < y$, $x = y$, und $y < x$ gilt. Wir können also Gleichheit zeigen, indem wir $x < y$ und $y < x$ ausschließen.

  Mit $x \leq y :\Longleftrightarrow x < y \vee x = y$ haben wir auch eine Ordnung und damit auch wie bei Mengen die Möglichkeit Gleichheit durch $x \leq y \wedge y \leq x$ nachzuweisen, also die Antisymmetrie zu nutzen.
- Die komplexen Zahlen sind schwerer zu behandeln als die reellen. Sie sind nicht geordnet.[1] Die Gleichheit zweier komplexer Zahlen ist gegeben durch die Gleichheit zweier geordneter Paare. Damit sind $z = x + \mathrm{i}y, z' = x' + \mathrm{i}y' \in \mathbb{C}$ also genau dann gleich, wenn $x = x' \wedge y = y'$ wahr ist. Für diese Aussage kann man dann Wissen über reelle Zahlen anwenden.

[1] Es gibt einen Satz der garantiert, dass man für alle Mengen Ordnungen angeben kann. Aber, dies ist auf den komplexen Zahlen nicht kompatibel mit der natürlichen Ordnung der reellen Zahlen.

Generelle Strategien:

- Ist die Menge in der ich arbeite in natürlicher Weise geordnet? Wenn ja, stellt sich die Frage ob ich die Ordnung kenne. Ein Beispiel haben wir auf dem Hausaufgabenblatt gesehen. Wir wollten Zeigen, dass ein Faktorraum $X/\sim$ gleich einer Partition $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist.
  - Wir haben auf $\mathcal{P}(X)$ die Ordnung $\subseteq$ und können diese Nutzen. Das ist in der Musterlösung erklärt.
  - Die Partitionen haben aber selbst eine natürliche Ordnung, die eine Verschärfung der Ordnung $\subseteq$ ist. Diese kann man definieren, nachweisen das es sich um eine Ordnung handelt und dann die Antisymmetrie nutzen.
- Wenn ich die Ordnung nicht kenne, dann versuche ich eine sinnvolle (im besten Fall natürliche) Ordnung zu definieren und zu zeigen, dass es eine ist und diese dann zu nutzen um Gleichheit zu zeigen.
- Komplexe Zahlen: Denke an die Polarform. Zwei Zahlen $z, z' \in \mathbb{C}$ sind genau dann gleich, wenn $|z| = |z'| \wedge \arg(z) - \arg(z') = 0 \mod 2\pi$. Für die Betragsgleichheit kann man, da es sich bei Beträgen um reelle Zahlen handelt

Bemerkung 1.1. *Diese Liste wird erweitert, sobald wir weitere Werkzeuge geschaffen haben. Beispielsweise weist man die Gleichheit von Funktionen, jedenfalls wenn diese differenzierbar sind, mithilfe geeigneter Sätze nach.*

1.1 Gleichheit von Funktionen

Mit den Mitteln der Differentialrechnung haben wir einfache Mittel an der Hand um zu untersuchen, wann zwei Funktionen gleich sind. Natürlich sind sie gleich, wenn sie punktweise gleich sind.

1.1.1 Gleichheit per Mittelwertsatz

Es sei $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) gegeben, und wir wollen zeigen, dass die Funktionen gleich sind. Dann reicht es zu zeigen, dass sie in einem Punkt gleich sind und das $(f-g)' \equiv 0$ ist. Denn dann ist ja $f = g + C$ für eine geeignete Konstante C und wenn wir Gleichheit in einem Punkt haben, dann muss $C = 0$ sein.

Statt der Differenz kann man auch ein geeignetes Produkt untersuchen. Haben wir $(fg)' \equiv 0$, dann ist $f = C\frac{1}{g}$ für eine geeignete Konstante C.[2]

Das ist insbesondere dann eine wichtige Methode, wenn man eine der Funktionen nicht hinschreiben kann.

Beispiel 1.1. *Wir betrachten die Gleichung $y' = \alpha y$. Eine Lösung ist $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$, da $f' = \alpha f$. Sehen alle Lösungen so aus? Ja, sei f eine beliebige Lösung der Gleichung. Dann betrachten wir*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)) &= -\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}f(x) + \mathrm{e}\alpha x f'(x) \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha x}(f'(x) - \alpha f(x)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Damit ist also $\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x) = C$ für alle x für eine geeignete Konstante C. Also muss $f(x) = C\mathrm{e}^{\alpha x}$ für alle x gelten.

2 Existenz

Das einzige Axiom der reellen Zahlen, dass die Existenz von Zahlen garantiert, wenn man von den Algebraischen Axiomen absieht, ist das **Vollständigkeitsaxiom**. Wir haben die Anwendung gesehen, als wir die Wurzel $x \mapsto x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ definiert haben.[3]

Generelle Strategien:

- Definiere eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, die nichtleer und nach oben beschränkt ist. Weiterhin sollte sie so angelegt sein, dass $\sup(M)$, dass dann wegen des **Vollständigkeitsaxioms** existiert, die Eigenschaften hat, die man haben will. Beispielsweise eine Wurzel einer Zahl zu sein.
- Wenn das Setup oben korrekt durchgeführt ist, hat man noch zu zeigen, dass das $\sup(M)$ tatsächlich die gewünschten Eigenschaften hat. Dazu hat man folgende Strategien:
  - Zumeist wird man $\sup(M) = \alpha$ für ein α zu zeigen haben. Man sollte also wahrscheinlich versuchen $\sup(M) > \alpha$ und $\sup(M) < \alpha$ zu einem Widerspruch zu führen. Der Widerspruch den man anstreben sollte bezieht sich auf Eigenschaften von $\sup(M)$. Diese sind
    (i) $\sup(M)$ ist eine obere Schranke von M
    (ii) $\sup(M)$ ist die kleinste obere Schranke von M.
  - Wie genau man das macht ist von Fall zu Fall unterschiedlich. Je mehr beweise dieser Art man gelesen hat, desto einfacher wird es werden diese selbst zu geben.

Beispiele für die Anwendung der Vollständigkeit durch oben beschriebene Strategie:

- Die Existenz der Wurzeln nichtnegativer reeller Zahlen.
- Fixpunkte für monotone Funktionen $f : [0,1] \to [0,1]$.
- Der Zwischenwertsatz.
- Das Intervall $[a,b]$ ist kompakt.

  Hier ist die Existenz eines endlichen Teilcovers zu zeigen. Dazu linken wir diese Information zur Existenz einer reellen Zahl durch die Definition der Menge

  $$X = \{x \in [a,b] \mid [a,x] \text{ ist endlich überdeckbar}\}.$$

- Satz von Weierstraß.

Bemerkung 2.1. *Das Vollständigkeitsaxiom hatten wir noch in Intervallschachtelung und Folgenvollständigkeit umformuliert. Alle oben erwähnten beweise lassen sich also in diese umformulieren.*[4]

[2] Vorausgesetzt alles ergibt Sinn.

[3] Natürlich geht alles genau so, wenn wir $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ definieren wollen.

[4] Das kann man als Übung betrachten. Beispielsweise die Existenz der Wurzeln oder der Zwischenwertsatz eigenen sich.

2.1 Existenz durch Zwischenwertsatz

Wir haben nun bereits genug Sätze, dass wir auf die Vollständigkeit indirekt zugreifen können. Eine typischen Anwendung des Zwischenwertsatzes ist zu zeigen, dass gewisse Gleichungen wenigstens eine Lösung besitzen. Dies ist im entsprechenden Skript-Abschnitt zum Zwischenwertsatz ausgeführt.

2.2 Existenz durch Fixpunktsätze

Behandelte Fixpunktsätze:

- Fixpunktsatz von Brouwer (Skript V12)
- Fixpunktsatz für monotone Funktionen (Hausaufgabe 3)

Wie der Zwischenwertsatz kann auch ein Fixpunktsatz Lösungen zu Gleichungen liefern. Jede Nullstellenaufgabe $f(x) = 0$ kann in eine Fixpunktaufgabe $f(x) + x = x$ umformuliert werden. Wenn anwendbar, kann also ein Fixpunktsatz die Nullstelle liefern. Umgekehrt, wenn eine Fixpunktgleichung $f(x) = x$ zu lösen ist, dann kann man statt dessen versuchen $f(x) - x = 0$ zu lösen.

2.3 Existenz durch Satz von Weierstraß

Der Satz von Weierstraß gibt die Existenz von relativen Extrema einer Funktion $f: K \to \mathbb{R}$, wenn K kompakt ist.

Beispiel 2.1. *Wir zeigen, dass $f: K \to K$ stetig mit $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle $x, y \in K$, $x \neq y$ einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt. Die Eindeutigkeit ist Übung. Die Existenz folgt durch Betrachtung der Funktion*

$$\varphi: K \to [0, \infty), \quad \varphi(x) = |f(x) - x|.$$

Da φ stetig auf K ist (Wieso?), werden Maximum und Minimum angenommen. Sei $x^* \in K$ mit

$$\varphi(x^*) = \inf_{x \in K} \varphi(x).$$

Wir nehmen nun an, dass $\varphi(x^*) \neq 0$. Dann ist

$$|f(f(x^*)) - f(x^*)| < |f(x^*) - x^*|.$$

Es gilt aber auch

$$\varphi(f(x^*)) = |f(f(x^*)) - f(x^*)|.$$

Dann wäre aber $\varphi(f(x^*)) < \varphi(x^*)$ und das ist per Definition von x^* nicht möglich. Also gilt $|f(x^*) - x^*| = 0$ und damit, nach den Eigenschaften des Betrages $f(x^*) = x^*$.

3 Kompaktheit

Kompaktheit ist definiert durch offene Übderdeckungen: Wenn sich auch jeder beliebigen offenen Übderdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung auswählen lässt, dann heißt die Menge kompakt:

- Kompakte Mengen sind abgeschlossen und beschränkt.[5]
- Kompakte Mengen sind total beschränkt.
- Jede endliche Menge ist kompakt.
- Jede unendliche kompakte Menge enthält einen Häufungspunkt.

[5] Jedenfalls in Situationen, in denen man Abstände messen kann. Gleiches gilt für total beschränkt. Beschränktheit ist kein toplogisches Konzept, lässt sich also nicht durch offene Mengen charakterisieren.

Kompaktheit kann als eine weitreichende Verallgemeinerung endlicher Mengen gesehen werden. Viele Methoden und Resultate die man für funktionen auf endlichen Menge Verwenden kann, haben Analoga für stetige Funktionen auf Kompakta. Einige Eigenschaften lassen sich von lokalen zu globalen heben. Ein Beispiel dafür ist

Charakterisierungen von Kompaktheit in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$):

- Eine Menge ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. (Heine-Borel)
- Eine Menge ist genau dann kompakt, wenn sie total beschränkt und abgeschlossen ist.
- Eine Menge ist genau dann kompakt, wenn sich aus jeder Folge in dieser Menge eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in der Menge auswählen lässt. (Folgenkompaktheit)

Kompaktheit und Stetigkeit:

- Stetige Bilder[6] kompakter Mengen sind kompakt.
- Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind beschränkt. (Weierstraß)
- Stetige Funktionen auf Kompakta nehmen ihre maximalen und minimalen Funktionswerte an. (Existenz von Optima/Extrema.)
- Stetige Funktionen auf Kompakta sind gleichmäßig stetig. (Heine)
- Ist $f: K \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, dann ist $f^{-1}: \operatorname{im}(f) \to K$ stetig.

[6] Stetige Bilder ist eine leicht unsaubere Sprechweise. Gemeint ist das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion.

4 Kurvendiksussion

Systematisch könnte man wie folgt vorgehen, um eine Funktion $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) zu analysieren:

- Bestimmung des Definitionsbereiches $\operatorname{dom}(f)$.
- Feststellen von Symmetrien (gerade ($f(x) = f(-x)$) oder ungerade Funktion ($f(-x) = -f(x)$)) oder und Periodizitäten.
- Bestimmung der Menge aller Nullstellen beziehungsweise des Schnittpunktes mit der y-Achse.
- Falls $\operatorname{dom}(f)$ aus endlich vielen Intervallen besteht, dann interessiert uns das Verhalten von f bei Annäherung an die Intervallendpunkte, Feststellen von Asymptoten.

  In der Kurvendiksussion sind Asymptoten oft linear[7]:

  - Eine Funktion f sei in einem Intervall $(c, +\infty)$ oder $(-\infty, c)$ definiert. Falls gilt: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ mit $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ oder $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$, dann heißt die Gerade $y = ax + b$ Asymptote von f bei Annäherung für $x \to \pm\infty$.
  - Eine Funktion f sei in einem Intervall $(x_0, x_0 + l)$ oder $(x_0 - l, x_0)$ definiert. Falls bei Annäherung von f an x_0 gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, dann heißt die Gerade $x = x_0$ senkrechte Asymptote von f bei Annäherung für $x \to x_0$.
- Ermittlung der Stetigkeitsintervalle, des Typs von Unstetigkeitsstellen, dem Verhalten der Funktion in Umgebung der Unstetigkeitsstellen.
- Bestimmung der lokalen und globalen Extrema, Randpunkte des Definitionsbereichs $\operatorname{dom}(f)$ beachten!

  Hilfsmittel: Wenn f in $x = a$ k-mal differenzierbar ist mit $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$ und $f^{(k)}(a) \neq 0$, dann gilt für k gerade folgende Aussage: $f^{(k)}(a) > 0 \to$ Minimum, $f^{(k)}(a) < 0 \to$ Maximum.

[7] Anndere Asymptoten sind möglich. Beispielsweise verhält sich $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ quadratisch für große x.

Wenn es keine Nullstellen der Ableitung(en) zu untersuchen gibt, dann bleibt noch immer die Definition. Links von einem Minimum ist die Funktion monoton fallend und rechts monoton wachsend. Entsprechend für ein Maximum.

- Bestimmung des Monotonieverhaltens der vorgelegten Funktion. Wenn $f'(a) > 0$, dann ist f in einer Umgebung von a streng monoton wachsend. Wenn $f'(a) < 0$, dann ist f in einer Umgebung von a streng monoton fallend.

  Beachte. Falls schon alle Extremalstellen bestimmt sind, dann erhält man die Monotonieintervalle durch Betrachtung des Verhaltens der Funktion zwischen zwei Extremalstellen.

- Bestimmung von Wendepunkten.

  Hilfsmittel: Es sei f in $x = a$ k-mal stetig differenzierbar ($k \geq 3$ und k ungerade). Falls $f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$ und $f^{(k)}(a) \neq 0$, dann ist $x = a$ Stelle eines Wendepunktes.

  Bestimmung des Krümmungsverhaltens:

  - konvex: Tangente liegt unterhalb des Graphen der Funktion,
  - konkav: Tangente liegt oberhalb des Graphen der Funktion.

5 Konvergenz von Reihen

Wie geht man auf eine strukturierte Art die Frage an, ob eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert? Die folgende Anleitung kann dazu helfen.

1. Frage: $a_n \to 0$?

$$\text{Antwort: } \begin{cases} \text{Ja} & \to \quad \text{Frage 2} \\ \text{Nein} & \to \quad \text{Reihe divergent.} \end{cases}$$

2. Frage: Reihe absolut konvergent? Dazu $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ vergleichen mit bekannter Reihe:

   a) **Polynomialer Typ**: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ und ähnlich. Benutze Majorantenkriterium mit $\frac{c}{n^q}$ und $c > 0$.

$$\text{Antwort: } \begin{cases} |a_n| \geq \frac{c}{n^q} \text{ und } q \leq 1 & \to \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ divergent.} \\ |a_n| \leq \frac{c}{n^q} \text{ und } q > 1 & \to \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ und auch } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent.} \end{cases}$$

   Wenn a_n kein festes Vorzeichen hat und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert → Frage 3.

   b) **Potenztyp**: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ und ähnlich. Berechne r durch (Quotienten- oder) Wurzelkriterium.

$$\text{Antwort: } \begin{cases} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r > 1 & \to \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergent.} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r = 1 & \to \quad \text{Frage 3.} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r < 1 & \to \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent.} \end{cases}$$

   Bemerkung: $r > 1$ sollte nicht auftreten, denn dann gilt nicht $a_n \to 0$.

   c) Glieder alternierend und Leibniz trifft zu?

$$\text{Antwort: } \begin{cases} \text{Ja} & -\to \quad \text{Reihe konvergent.} \\ \text{Nein} & -\to \quad 4 \end{cases}$$

   d) Von hier ist Kreativität gefragt.

6 Polyas Algorithmus

In [Pol14] hat Polya[8] einen Algoritmus angegeben, der einem bei der Lösung von Übungsaufgaben helfen kann. Das ganze Buch hat mit Unterrichtsmethoden sowie *Heuristiken zur Problemlösung* zu tun. Wer die Zeit hat, sollte sich das ganze Buch zu Gemüte führen; insbesondere dann, wenn man plant in der Zukunft anderen Mathematik beizubringen. Einige Methoden und Heuristiken habe ich mit kleinen Beispielen im Langform-Skript erklärt.

[8] George Pólya, östereichisch-ungarischer Mathematiker, 1887-1985.

6.1 Der Algoritmus

(S1) Verstehe ich das Problem?

Was ist unbekannt? Was ist gegeben/Was sind die Daten?[9] Was sind die Bedingungen/Annahmen?[10]

[9] Beispielsweise: Sei X eine Menge.

[10] Beispielsweise: Wenn $A \subseteq X$, dann gilt $A \cap X = A$.

Fragen:

- Ist es überhaupt möglich die Bedingung zu erfüllen?
- Ist die Bedingung stark genug um die Unbekannte zu bestimmen?
- Ist sie zu schwach?
- Gar überflüssig?
- Schlimmstenfalls widersprüchig?

Was tun?

- Zeichne eine Skizze der Situation.
- Führe gute Notation ein.
- Teile die Bedingung in ihre Bestandteile auf und schreibe sie vernünftig in nachvollziehbarer Notation auf.

(S2) Arbeite einen Angriffsplan aus.[11]

> Know the solution of every problem that has been solved.
>
> Richard P. Feynman

[11] Wir haben in der Vorlesung an Beispiele gesehen, dass Strategien nicht vom Himmel fallen sondern man sich das überlegen kann. Siehe auch die Abschnitte zu Gleichheit und Existenz.

Fragen:

- Habe ich dieses Problem schon einmal gesehen? Wenigstens in leicht anderer Form?[12]
- Kennst du bereits ein verwandtes Problem beziehungsweise seine Lösung? Haben wir in der Vorlesung Sätze behandelt die mit dem Problem zu tun haben und nützlich sein könnten?[13]

[12] Das ist bei Beweisaufgaben auf dem Hausaufgabenblatt praktisch immer der Fall. Es gibt stets einen Modellfall. Lies das Skript/die Notizen aus der VL!

[13] Wenn es sich um Hausaufgaben handelt, dann ja! mit Sicherheit!

Was tun?

- Sieh dir die Unbekannte genau an. Kannst du an ein anderes Problem denken mit der gleichen Unbekannten oder zumindest einer ähnlichen Unbekannten?
- Finde ein Problem, dass mit deinem verwandt aber gelöst ist. Lässt sich die Lösung für dein Problem nutzen? Kannst du das Resultat nutzen oder die angewandte Methode?

7 Der Versuch einer Beispielliste

Literatur

[Pol14] G. Polya. *How to solve it*. Princeton Science Library. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2014.