Diff 2 Cheat Sheet

Topologische Grundbegriffe

- $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \iff \lim\limits_{k\to\infty} x_{k,l} = a_l \forall 1 \le l \le n$
- Beschränktheit: $a_k \in B_{C(0)} \forall k \in \mathbb{N}$
- Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.
- Hölder-Ungleichung: $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \|x\|_p \|y\|_q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- Topologie: $\tau \subset \mathbb{P}(M)$ als Familie aller offenen Teilmengen von M
  - $\emptyset, M \in \tau$
  - Abgeschlossen über endlichem Schnitt und beliebiger Vereinigung
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall U \in \tau_d : a \in U \exists N \in \mathbb{N} : a_n \in U \forall n \ge N$
- beschränkter Operator: $\|Ax\|_W \le C\|x\|_V$. Jede lineare Abbildung aus endlichdimensional Def.bereich ist beschränkt.
- Operatornorm: $\|A\| := \sup\limits_{x\in V} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V}$
- Folgende Aussagen über lineare Operatoren sind äquivalent:
  - A ist beschränkt
  - A ist stetig
  - A ist stetig an $x = 0$
- $L(V, W)$ ist Banachraum unter Operatornorm, falls $(W, \|\cdot\|_W)$ ein Banachraum ist.
- Banachalgebra: vollständiger normierter K-VR mit (Matrix-) Multiplikation und $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$
  - Ist $(V, \|\cdot\|_V)$ Banachraum, dann ist $L(V, V)$ mit Hintereinanderausführung eine Banachalgebra
- Sei $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, dann ist $P_{\texttt{cal}} A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergent für $\|x\| < r$.

Differenzierbare Abbildungen

- Differenzierbarkeit: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Lh}{\|h\|} = 0$. Dann ist $df(x_0) = L$
  - äquivalent: $f(a+h) = f(a) + Lh + R(h)$ und $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$
- Richtungsableitung: $\partial_h f(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$
- Differenzierbarkeit $\Longrightarrow$ Differenzierbarkeit in alle Richtungen mit $df(a)h = \partial_h f(a) = \langle \nabla f(a), h\rangle$
- partielle Differenzierbarkeit: alle Richtungsableitungen nach den Basisvektoren existieren
- Ist f in $U \ni a$ partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen in a stetig, dann ist f in a differenzierbar.
- $\nabla f(a) = 0 \Longrightarrow \partial_h f(a) = 0 \forall h \in \mathbb{R}^n$
- $|\partial_h f(a)| \le \|\nabla f(a)\|_2 \forall \|h\|_2 = 1$
- parametrisierte/differenzierbare Kurve: $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, alle γ_i stetig/differenzierbar
- Tangentialvektor: $\cdot\, \gamma(t) := (\gamma_{1'}(t), ..., \gamma_{n'}(t))$
- Kettenregel: $\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0) = df(\gamma(t_0)) \cdot \gamma(t_0) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \cdot\, \gamma(t_0)\rangle$
- Mittelwertsatz: $\exists \xi \in (a + t(b-a) \mid 0 \le t \le 1)$ sodass $f(b) - f(a) = df(\xi)(b-a)$
- X heißt zusammenhängend, wenn es keine Zerlegung $X = U \cup V$ gibt mit $U, V \neq \emptyset$ und offen und $U \cap V = \emptyset$
- X heißt wegzusammenhängend, falls $\forall a, b \in X \exists \gamma : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$
- zusammenhängend $\iff$ wegzusammenhängend
- Falls $\nabla f(a) = 0$ für alle $a \in U$ mit U zusammenhängend und offen, dann ist f konstant
- Sei $f \in C^1(U)$ und $K \subset U$ kompakt und konvex. Sei $\|f'\|_K := \max\limits_{x\in K} \langle \nabla f(x), 1\rangle$. Dann ist $|f(y) - f(x)| \le \|f'\|_K \|y - x\|_\infty$ für $x, y \in K$. Damit ist $f : K \to \mathbb{C}$ Lipschitz-stetig.
- Satz von Schwarz: Ist $\partial_i \partial_j f$ in a stetig, dann ist $\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a)$

- Differential zweiter Ordnung: $d^{(2)} f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, (h, k) \mapsto \partial_h \partial_k f(a)$, symmetrisch und bilinear
- Hesse-Matrix: $H_{f(a)} = \left(\partial_i \partial_j f(a)\right)_{1 \le i,j \le n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Es gilt $d^{(2)} f(a)(h, k) = h^T H_{f(a)} k$
- Differential k-ter Ordnung: $d^{(k)} f(a)\left(h^{(1)}, ..., h^{(k)}\right) = \sum\limits_{i_1=1}^{n} ... \sum\limits_{i_k=1}^{n} \partial_{i_1} ... \partial_{i_k} f(a) \prod\limits_{j=1}^{k} h_{i_j}^{(j)}$
- Taylorpolynom: $T_k f(x_0, h) = \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} d^{(j)} f(x_0) h^j$
- Satz von Taylor: $\exists \xi \in [x_0, x_0 + h]$ sodass $f(x_0 + h) = T_{k(x_0,h)} + \frac{1}{(k+1)!} d^{(k+1)} f(\xi) h^{k+1}$
- a lokales Extremum von $f \Longrightarrow \nabla f(a) = 0$
- a lokales Minimum von $f \Longrightarrow H_{f(a)}$ pos. semindefinit
- $H_{f(a)}$ pos. definit und $\nabla f(a) = 0 \Longrightarrow a$ lokales Minimum
- Sei $f : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$ mit
  - $f(x, \cdot)$ stetig für alle $x \in U$
  - $f(\cdot, t)$ partiell in x_i differenzierbar für alle $t \in [a, b]$
  - $\partial_{x_i} f$ stetig
  - Dann ist $\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_a^b f(x, t) dt = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, t) dt$
- Jacobi-Matrix: $J_{f(a)} = \left(\nabla f_{k(a)}^T\right)_{1 \le k \le n} \in M_{n \times m}(K)$
- Kettenregel: $J_{g \circ f}(a) = J_{g(f(a))} J_{f(a)}$
- Sei $f \in C^1(U, W)$ und $Z \subset U$ kompakt und konvex. Schrankensatz: $\|f(y) - f(x)\| \le \|df\|_Z \|y - x\|$ mit $\|df\|_Z = \sup\limits_{a \in Z} \|df(a)\|$ (Operatornorm)
- Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ und $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dann ist f in a $\mathbb{C}$-differenzierbar g.d.w. $(x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$ in (a_1, a_2) $\mathbb{R}$-differenzierbar ist und $\partial_x u(a) = \partial_y v(a)$ und $\partial_y u(a) = -\partial_x v(a)$
- Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $\det f'(a) \ne 0$. Dann gibt es offene Teilmengen $a \in V \subseteq U$ und $f(a) \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ sodass $f : V \to W$ bijektiv ist und f^{-1} differenzierbar ist. Es gilt $\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'\left(f^{-1}(y)\right)\right)^{-1}$
- Homöomorphismus: $f : X \to Y$ invertiertbar, f und f^{-1} stetig
  - Diffeomorphismus: f und f^{-1} zusätzlich stetig differenzierbar
- Satz über implizite Funktionen: Sei $U \subseteq R^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $(a, b) \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit $f(a, b) = 0$ und $\det J_{f(a,b)}[n :] \ne 0$. Dann gibt es offenen Umgebungen $a \in U' \subseteq \mathbb{R}^n, b \in U'' \subseteq \mathbb{R}^m$ und ein stetig differenzierbares $g : U' \to U''$ sodass $f(x, g(x)) = 0$.
  - Berechnung der Ableitung: $g'(a) = -\left(f'_{y(a,g(a))}\right)^{-1} f'_{x(a,g(a))}$
- M heißt d-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit, falls gilt: für alle $a \in M$ gibt es offene Umgebungen $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ sodass $\varphi(M \cup U) = \mathbb{R}_0^d \cap V$
  - φ heißt Karte von M. Eine Familie von Karten heißt Atlas von M, falls $M \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} U_i$
- M ist d-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit g.d.w. $\forall a \in M \exists a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $n - d$ stetig differenzierbare Funktionen $f_j : U \to \mathbb{R}$, sodass gilt:
  - $M \cap U = \left\{x \in U \mid f_{j(x)} = 0, 1 \le j \le n - d\right\}$
  - $f'_1(a), ..., f'_{n-d}(a)$ sind linear unabhängig

Das Lebesgue-Integral

- Quader: $Q = I_1 \times ... \times I_n$. Volumen $v(Q) = \prod\limits_{i=1}^{n} |I_i|$
- Treppenfunktion: $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{r} c_k 1_{Q_k}$. Integral $\int \varphi(x) dx = \sum\limits_{k=1}^{r} c_k v(Q_k)$
- Hüllreihe von f: $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ mit $c_k \ge 0$, Q_k offen, und $|f(x)| \le \varphi(x)$

- Inhalt: $I(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v(Q_k)$
- L^1-Halbnorm: $\|f\|_1 = \inf I(\varphi)$ über alle Hüllreihen φ von f.
- für Treppenfunktionen φ gilt $\int |\varphi(x)|\ dx = \|\varphi\|_1$
- Lebesgue-Integrierbarkeit: $\exists (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$. Dann ist $\int f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x)dx$
- Sind f, g integrierbar und g beschränkt, ist $f \cdot g$ integrierbar
- Kleiner Satz von Beppo-Levi: Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend/fallend, sodass $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert und $| \int \varphi_{k(x)} dx \ | < C$. Dann ist f integrierbar.
- $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt mit U offen und beschränkt ist Lebesgue-integrierbar
- $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig mit K kompakt ist Lebesgue integrierbar
- Kleiner Satz von Fubini: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ kompakt (offen und beschränkt) und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt. Sei $A_y = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\}$. Dann ist $\int_A f(x, y)d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{A_y} f(x, y)dxdy$
- Lebesgue-Messbarkeit: $A \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar, falls 1 über A integrierbar ist. Dann ist $v(A) = \int 1_{A(x)} dx$
- Nullmenge: $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $v(N) = 0 \iff \|1_N\|_1 = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists Q_k$ sodass $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$
  - abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung und beliebigem Schnitt
- Für f mit $\|f\|_1 < \infty$ ist $(x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \infty)$ Nullmenge
- zwei integrierbare Funktionen, die fast überall (bis auf Nullmenge) gleich sind, haben dasselbe Integral
- $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ fast überall
- $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_1 = 0\}$ ist UVR von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$
- $L^1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{N}$
- L_1-Norm: $\|f + \mathcal{N}\|_1 = \|f\|_1$
- Reisz-Fischer: für alle L^1-Cauchy-Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ sodass `seq` fk L^1-konvergent gegen f ist und gilt
  - $\lim_{k\to\infty} \int f_{k(x)} dx = \int f(x)dx$
  - es gibt Teilfolge die fast überall punktweise gegen f konvergiert
- Beppo-Levi: Sei `seq` fk monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{k(x)}$, dann ist f integrierbar g.d.w. $\exists C > 0$ sodass $| \int f_{k(x)} dx \ | < C$. Dann ist $\int f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int f_{k(x)} dx$
- Ausschöpfung von A: `seq` Ak mit $A_k \subseteq A_{k+1}$ und $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$
- Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und `seq` Ak Ausschöpfung und f über jedes A_k integrierbar, dann ist f über A integrierbar g.d.w. $\exists C > 0$ sodass $\int_{A_k} |f(x)|\ dx < C$. Dann ist $\int_A f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)dx$
- majorisierte Konvergenz: Sei `seq` fk fast überall punktweise gegen f konvergent und $|f_k| \leq F$ für ein $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist f integrierbar mit $\int f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int f_{k(x)} dx$
- Sei $f : \mathbb{R}^n \times (a, b) \to \mathbb{C}$ mit
  - $f(\cdot, t)$ integrierbar für alle $t \in (a, b)$
  - $f(x, \cdot)$ differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$
  - es gibt φ sodass $| \ \partial_t f(x, t) \ | \leq \varphi(x)$ für alle $t \in (a, b)$
- Dann ist $\frac{d}{dt} \int f(x, t)dx = \int \partial_t f(x, t)dx$
- Fubini: es gibt Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ sodass für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus N$ $f(\cdot, y)$ integrierbar ist mit $F(y) = \int f(x, y)dx$. Es gilt $\int f(x, y)d(x, y) = \int F(y)dy$

- Sei $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $f : V \to \mathbb{C} \cup (\infty)$ integrierbar, dann ist $\int\limits_V f(y) dy = \int\limits_U f(T(x)) \cdot |\det T'(x)| \, dx$