Funktionalanalysis

- Notationen:
  - $D \subset\subset \Omega$: D ist präkompakt in Ω (d.h. $\overline{D}$ ist kompakt und liegt in Ω)
- Metrik:
  - $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$
  - $d(x, y) = d(y, x)$
  - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- äquivalente Metriken d, δ: $\exists c, C > 0 : \forall x, y \in X : c \cdot d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq C \cdot d(x, y)$
  - äquivalente Metriken induzieren die gleiche Topologie, haben die gleichen konvergenten Folgen und die gleichen Cauchy-Folgen
- Konvergenz ist eine topologische Eigenschaft: $x_n \to x$ in (X, d) gdw jede offene Umgebung $U \ni x$ fast alle Folgenglieder enthält.
- Cauchy-Folgen sind keine topologische Eigenschaft; topologisch äquivalente Metriken können unterschiedliche Cauchy-Folgen haben
- Vervollständigung metrischer Räume: Sei (X, d) metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum $\hat{X}$, in den X isometrisch und dicht eingebettet ist. Er ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.
  - Konstruktion: $\hat{X} = \{\text{Cauchy-Folgen in } X\}/\sim$, wobei $x_n \sim y_n$ gdw $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$. Die Metrik auf $\hat{X}$ ist definiert durch $\hat{d}([x_n], [y_n]) = \lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$.
- Fréchet-Raum: hausdorffscher, vollständiger topologischer Vektorraum mit abzählbaren Nullumgebungsbasis
- Kompaktheit
  - Folgenkompaktheit: Jede Folge in K hat eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in K liegt
  - Überdeckungskompaktheit: Jede offene Überdeckung von K hat eine endliche Teilüberdeckung
  - In metrischen Räumen sind diese beiden Begriffe äquivalent
- $(X, \|\cdot\|_X)$ ist genau dann Banachraum, wenn jede absolut konvergente Reihe in X konvergiert.
- Lebesguescher Satz von der dominierten Konvergenz: Seien $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \to f$ μ-fast überall. Sei g μ-integrierbar mit $|f_n| \leq g$ μ-fast überall für alle n. Dann ist $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$
- Satz des Pythagoras: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ falls $\langle x, y \rangle = 0$
  - verallgemeinert: Sei $\{x_1, ..., x_n\}$ eine endliche orthonormale Familie. Dann gilt $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 + \left\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2$
- Parallelogrammgleichung: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
  - Die Parallelogrammgleichung ist genau dann erfüllt, wenn die Norm von einem Skalarprodukt induziert wird.
- $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2$
- Banachscher Fixpunktsatz: Jede strikt kontraktive Abbildung $T : X \to X$ (also $\exists c \in (0, 1) : d(Tx, Ty) \leq c \cdot d(x, y)$) in einem vollständigen metrischen Raum (X, d) hat genau einen Fixpunkt.
- Quotientenraum: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ normierter Raum und $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist durch $\|x + U\|_{X/U} := \inf\limits_{u \in U} \|x - u\|_X$ eine Norm auf X/U definiert. Ist X Banachraum, so ist auch X/U Banachraum.
- Dualraum: $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ mit Operatornorm $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ ist Banachraum, falls X Banachraum ist.
- X Banachraum, $\overline{B_1(0)}$ kompakt $\iff \dim(X) < \infty$
- X Banachraum, Heine-Borel gilt (kompakt $\iff$ beschränkt und abgeschlossen) $\iff \dim(X) < \infty$

Funktionenräume

- Beschränkte Funktionen: $B(S) = \{f : S \to Y \mid f \text{ beschränkt}\}$
  - mit Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$ ist $B(S)$ Banachraum
- stetige Funktionen: $C^0(S) = \{f : S \to Y \mid f \text{ stetig}\}$
  - mit Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$ ist $C^0(S)$ Banachraum
- differenzierbare Funktionen: $C^m\left(\overline{\Omega}\right) = \{f : \Omega \to Y \mid f \text{ ist } m \text{ -mal stetig differenzierbar}\}$
  - mit Norm $\|f\| = \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0\left(\overline{\Omega}\right)}$ ist $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ Banachraum für jedes $m \in \mathbb{N}$
  - $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ mit Familie von Halbnormen $\|f\|_m = \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0\left(\overline{\Omega}\right)}$ ist $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ Fréchet-Raum
- hölderstetige Funktionen: $C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{f \in C^m\left(\overline{\Omega}\right) \,\middle|\, \partial^s f \text{ ist } \alpha \text{ -hölderstetig für } |s| = m\right\}$
  - mit Norm $\|f\| = \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0\left(\overline{\Omega}\right)} + \sum_{|s| = m} \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|(\partial^s f)(x) - (\partial^s f)(y)|}{|x-y|^\alpha}$ ist $C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ Banachraum
- $C_0(S) = \{f \in C(S) \mid \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subseteq S \text{ kompakt mit } |f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in S \setminus K\}$
  - auf normierten Räumen äquivalent: $C_0(S) = \left\{f \in C(S) \,\middle|\, \lim_{\|x\| \to \infty} |f(x)| = 0\right\}$
  - mit Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$ ist $C_0(S)$ Banachraum
- Lp-Räume
  - $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ messbar}, \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty\right\}$
  - $\|f\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$
    - für $p = \infty$: $\|f\| = \inf_{\substack{N \in \mathcal{A} \\ \mu(N) = 0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|$
  - $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p / \mathcal{N}$ mit $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^p \mid \|f\| = 0\}$
  - Folgenraum: $l^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), A \mapsto |A|)$
  - Höldersche Ungleichung: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
  - Minkowski-Ungleichung: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
  - Youngsche Ungleichung: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ mit $a, b \geq 0$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
  - Riesz-Fischer-Theorem: L^p-Räume sind vollständig
  - für $p = 2$ Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} \,\mathrm{d}\mu(x)$
- separabler Raum: Ein topologischer Raum X heißt separabel, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subseteq X$ gibt.
  - Jeder normierte Raum mit abzählbarer Basis ist separabel.
  - Jeder Unterraum eines separablen normierten Raums ist separabel.
  - Jeder separable unendliche-dimensionale Hilbertraum ist isometrisch zu l^2.
  - Jeder separable endliche-dimensionale Hilbertraum ist isometrisch zu $\mathbb{C}^n$.
- Träger einer Funktion: $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$
- $C_c^m = \{f \in C^m \mid \operatorname{supp}(f) \text{ ist kompakte Teilmenge von } X\}$
  - Topologie: TODO
- Schwartz-Raum: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \left(\partial^\beta f\right)(x)\right| < \infty \text{ für alle Multiindizes } \alpha, \beta\right\}$
  - mit Familie von Halbnormen $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \left(\partial^\beta f\right)(x)\right|$ ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Fréchet-Raum
- schwache Ableitungen: Sei $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann heißt g schwache α-te Ableitung von f, wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt: $\int_\Omega f(x)(\partial^\alpha \varphi)(x) \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x) \varphi(x) \,\mathrm{d}x$
- Sobolev-Raum: $W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p \mid f \text{ hat schwache Ableitungen bis zur Ordnung } m \text{ und diese liegen in } L^p\}$
  - mit Norm $\|f\| = \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_p$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ Banachraum

- für $p = 2$ Hilbertraum $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \sum_{|s| \leq m} \langle \partial^s f, \partial^s g \rangle_2$
- Projektionssatz: Sei $M \subseteq H$ eine abgeschlossene Untermenge eines Hilbertraums H. Dann existiert für jedes $x \in H$ genau ein $y \in M$ mit $\|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|$.
- Im Hilbertraum gilt: $\lim_{j \to \infty} f_j = j \Longleftrightarrow \lim_{j \to \infty} \|f_j\| = \|f\|$ und für alle $g \in H$ gilt $\lim_{j \to \infty} \langle f_j, g \rangle = \langle f, g \rangle$

Dualität von Funktionenräumen

- Für $1 < p < \infty$: $(L^p)' = L^q$
- $(L^1)' = L^\infty$, aber $(L^\infty)' \neq L^1$
  - $(c_0)' = l_1$ mit c_0 der Nullfolgenraum
- Für $1 < p < \infty$: $(W^{m,p})' = W^{-m,q}$

Dichtheitssätze

- $C_c^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$
- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- Polynome sind dicht in $C([a, b])$ für $a < b$
- $C_c^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^p \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$

Lineare Operatoren

- Sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator zwischen normierten Räumen. Dann ist äquivalent:
  - T ist stetig
  - T ist stetig in einem $x_0 \in X$
  - $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$
  - es gibt $C > 0$ mit $\|Tx\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$

Lineare Funktionale

- Darstellungssatz von Riesz: Sei H ein Hilbertraum. Dann existiert für jedes stetige, lineare Funktional $f \in H'$ genau ein $y \in H$ mit $f(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in H$ und $\|f\| = \|y\|$.
- Satz von Lax-Milgram: Sei H ein Hilbertraum und $a : H \times H \to \mathbb{C}$ eine stetige Bilinearform. Dann existiert genau ein stetiger linearer Operator $A : H \to H$ mit $a(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ für alle $x, y \in H$ und $\|A\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |a(x, y)|$.
  - Ist a zusätzlich koerziv, d.h. $\exists \alpha > 0 : a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$ für alle $x \in H$, so ist A invertierbar und $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$.
- Satz von Hahn-Banach: Sei $U \subseteq V$ linearer Unterraum, sei $p : V \to \mathbb{R}$ sublinear (d.h. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ und $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für $\lambda \geq 0$), und sei $f : U \to \mathbb{R}$ lineares Funktional mit $\operatorname{Re} f(u) \leq p(u)$ für alle $u \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $F : V \to \mathbb{R}$ von f mit $\operatorname{Re} F(v) \leq p(v)$ für alle $v \in V$.
  - für lineare Funktionale: Sei $U \subseteq V$ linearer Unterraum und $y' \in Y'$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $x' \in X'$ von y' mit $\|x'\| = \|y'\|$.
  - Sei $U \subset V$ abgeschlossener Unterraum und $x_0 \notin U$. Dann existiert ein lineares Funktional $x' \in X'$ mit $x' = 0$ auf U, $\|x'\| = 1$, und $x'(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, U)$.

Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

- Bairscher Kategoriensatz: Sei $X \neq \emptyset$ vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit abgeschlossenen Mengen A_n. Dann hat mindestens eine der Mengen A_n ein nichtleeres Inneres.

- Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit: Sei X vollständiger metrischer Raum und Y normierter Raum. Sei $F \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ eine Familie stetiger linearer Operatoren. Wenn für jedes $x \in X$ gilt $\sup_{T \in F} \|Tx\| < \infty$, dann ist $\sup_{T \in F} \|T\| < \infty$.
  - punktweise Beschränktheit $\Longrightarrow$ gleichmäßige Beschränktheit
  - Banach-Steinhaus: Seien X, Y Banachräume und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ eine Folge stetiger linearer Operatoren. Dann konvergiert T_n genau dann punktweise, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
    - $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$
    - Es gibt eine dichte Teilmenge $D \subseteq X$, sodass $T_n x$ für alle $x \in D$ eine Cauchy-Folge ist.
- offene Abbildung: $T : X \to Y$ heißt offen, wenn $T(U)$ offen ist für jedes offene $U \subseteq X$.
  - Satz von der offenen Abbildung: Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung. Dann ist T genau dann offen, wenn T surjektiv ist.
  - Satz vom stetigen Inversen: Ist T stetige lineare Bijektion zwischen Banachräumen, so ist T^{-1} stetig.
- Satz vom abgeschlossenen Graphen: Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann ist T genau dann stetig, wenn der Graph von T abgeschlossen ist.
  - Hellinger-Toeplitz: Sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein linearer Operator mit $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ für alle $x, y \in H$. Dann ist T stetig.

Fouriertransformation

- Fouriertransformation: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $(\mathcal{F} f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{(-i \langle \xi, x \rangle} \, \mathrm{d}x$
  - Inverse Fouriertransformation: $\left(\mathcal{F}^{-1} \hat{f}\right)(x) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i \langle \xi, x \rangle} \, \mathrm{d}\xi$
    - $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F} R$ mit $(Rf)(x) = f(-x)$
  - stetig von $L^1(\mathbb{R}^n)$ in $C_0(\mathbb{R}^n)$
  - Differentiation für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:
    - $\partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
    - $(\mathcal{F}(\partial^\alpha f))(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$
  - Faltungstheorem: Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, \mathrm{d}y$ die Faltung von f und g.
    - $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \hat{g}$
    - $\mathcal{F}(fg) = \left(\frac{1}{(2\pi)^n}\right) \hat{f} * \hat{g}$
- Satz von Plancherel: $\mathcal{F}$ lässt sich zu einem unitären Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, d.h. $\|\mathcal{F} f\|_2 = \|f\|_2$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Distributionen

- Distributionen: $\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$ mit $\mathcal{D}$ Testfunktionenraum (z.B. C_c^∞ oder Schwartz-Raum)
  - äquivalent: T ist Distribution $\Longleftrightarrow$ für alle offenen $D \subset\subset \Omega$ gibt es $C_D > 0$ und $m_D \in \mathbb{N}_0$ mit $|T(\varphi)| \leq C_D \|\varphi\|_{C^{m_D}(\overline{D})}$ für alle $\varphi \in C_c^{\infty(D)}$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset D$
    - Kann m_D unabhängig von D gewählt werden, so heißt das minimale solche m die Ordnung von T.
  - Träger einer Distribution: $\operatorname{supp}(T) = \{x \in \Omega \mid \text{für alle offenen } U \subseteq \Omega \text{ mit } x \in U \text{ gibt es } \varphi \in \mathcal{D}(U) \text{ mit } T(\varphi) \neq 0\}$
  - Schreibweise über duale Paarung: $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$
  - Ableitung von Distributionen: $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$.
  - Multiplikation von Distributionen mit Funktionen: Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$. Dann ist $fT : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$ eine Distribution.

  - Faltung von Distributionen mit Funktionen: Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\langle f * T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{f} * \varphi \rangle$ mit $\tilde{f}(x) = f(-x)$ eine Distribution.
  - Faltung zweier Distributionen: TODO
  - Fouriertransformation temperierter Distributionen: Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mathcal{F}(T) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$ eine temperierte Distribution.
- Wichtige Distributionen:
  - Dirac-Delta: $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$
    - TODO Ableitungen
    - $\mathcal{F}(\delta) = 1$ und $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta$
  - Heaviside-Funktion: $H(x) = \begin{cases} 0 \text{ falls } x<0 \\ 1 \text{ falls } x\geq 0 \end{cases}$
    - TODO Ableitungen