Maß und W Klausurzettel

Allgemein

- Satz von Heine-Borel (Überdeckungssatz): Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:
  - $\mathcal{M}$ ist beschränkt und abegeschlossen
  - Jede offene Überdeckung von $\mathcal{M}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung

Mengensysteme

- Algebra:
  - $\Omega \in \mathcal{A}$
  - $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$
  - $A_i \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (abegeschlossen gegen endliche Vereinigungen)
- σ-Algebra:
  - $\Omega \in \mathcal{A}$
  - $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$
  - $A_i \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (abegeschlossen gegen abzählbare Vereinigungen)
- Dynkin-System:
  - $\Omega \in \mathcal{D}$
  - $A \in \mathcal{D} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{D}$
  - $A_i \in \mathcal{D}$ und paarweise disjunkt $\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$
- $a(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E}), \delta(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$
- Dynkins π-λ-Satz:
  - Sei $\mathcal{D}$ Dynkin-System, $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil. Dann ist $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$
  - Sei $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil. Dann ist $\sigma(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{E})$
- Semiring:
  - $\emptyset \in \mathcal{S}$
  - $\mathcal{S}$ ist $\cap$-stabil
  - $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ mit paarweise disjunkten $C_i \in \mathcal{S}$

Mengenfunktionen

- Mengenfunktion: $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$. Mögliche Eigenschaften:
  - endlich: $\mu(A) < \infty$
  - σ-endlich: Es gibt $A_i \nearrow \Omega$ mit $\mu(A_i) < \infty$
  - additiv: A_i paarweise disjunkt: $\mu\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
  - σ-additiv: A_i paarweise disjunkt: $\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$
  - subadditiv: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
  - σ-subadditiv: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$
- Maß: $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$
  - $\mathcal{M}$ ist σ-Algebra
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - μ ist σ-additiv
- Wmaß: Maß mit $\mu(\Omega) = 1$
- Dirac-Maß: $\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } \omega \in A \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$
- Zählmaß: $\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{wenn } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{wenn } A \text{ unendlich} \end{cases}$

- diskretes Wmaß: Sei $\omega_i \in \Omega$ und $p_n \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_n = 1$. Dann ist $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \delta_{\omega_i}(A) = \sum_{n \text{ mit } \omega_n \in A} p_n$.
- Messraum: $(\Omega, \mathcal{M})$ mit $\mathcal{M}$ σ-Algebra
- Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Maß μ
- Rechenregeln:
  - $B \subset A \Longrightarrow \mu(B) \leq \mu(A)$ (Monotonie)
  - $B \subset A, \mu(B) \leq \infty \Longrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$
  - $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (σ-Subadditivität)
  - $A_n \nearrow A \Longrightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von oben)
  - $A_n \searrow A$ und $\mu(A_1) < \infty \Longrightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von unten)
- Eindeutigkeittsatz für Maße: Seien μ_1, μ_2 Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger. Dann ist $\mu_1 = \mu_2$, falls gilt:
  - $\mu_1(E) = \mu_2(E) \forall E \in \mathcal{E}$ (für Wmaße ausreichend)
  - μ_1, μ_2 eingeschränkt auf $\mathcal{E}$ sind σ-endlich
- äußeres Maß: $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$
  - $\mu^*(\emptyset) = 0$
  - $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie)
  - $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (σ-subadditiv)
- induziertes äußeres Maß: Sei $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. Dann definiert $\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \mid C_i \in \mathcal{M}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right\}$ ein äußeres Maß.
- Mengensystem der μ^*-messbaren Mengen: $\mathcal{A}(\mu^*) = \{A \subset \Omega \mid \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E) \ \ \forall E \subset \Omega\}$. Es gilt:
  - $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist σ-Algebra
  - $\mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ ist Maß
- Fortsetzungssatz von Carathéodory: Sei $\mathcal{S}$ Semiring und $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ eine additive, σ-subadditive Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. Sei μ^* das von μ induzierte äußere Maß. Dann ist $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$ und $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}(\mu^*)$. Somit ist $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$.

Konstruktion von Maßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- maßdefinierende Funktion: $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:
  - $x \leq y \Longrightarrow G(x) \leq G(y)$ (mon. wachsend)
  - $x_n \searrow x \Longrightarrow G(x_n) \to G(x)$ (rechtsstetig)
- Verteilungsfunktion: maßdefinierende Funktion F mit $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
- Sei G maßdefinierende Funktion, dann gibt es genau ein Maß μ_G auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\mu_G((a, b]) = G(b) - G(a)$
  - Lebesgue-Maß: $G(x) = x$
- Korrespondenzsatz:
  - Ist P ein Wmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann ist $F(x) = P((-\infty, x])$ die Verteilungsfunktion zu P.
  - Die so definierte Abbildung $\Psi : \{\text{Wmaße auf } \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \to \{\text{Verteilungsfunktionen auf } \mathbb{R}\}$ ist bijektiv.
- vollständiger Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: $\tilde{N} \subset N \in \mathcal{A} \land \mu(N) = 0 \Longrightarrow \tilde{N} \in \mathcal{A}$
  - $\mathcal{A}$ enthält alle Teilmengen von μ-Nullmengen
- Vervollständigung: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann definiert $\left(\Omega, \mathcal{A}_\mu^v, \mu^v\right)$ einen vollständigen Maßraum, wobei $\mathcal{A}_\mu^v = \left\{A \cup \tilde{N} \mid A \in \mathcal{A}, \tilde{N} \subset N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0\right\}$ und $\mu^v\left(A \cup \tilde{N}\right) = \mu(A)$.

- Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^v_\lambda, \lambda^v)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, dann heißt $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^v_\lambda$ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

- Cantor-Menge: $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
  - $C_0 = [0, 1]$
  - C_k: Entferne das mittlere offene Drittel jedes Intervalls des vorherigen Schritts