Numerik 1

- Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$

Kapitel 2

Matrixnormen

- Frobenius-Norm: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2}$
- Operator-Norm: $\|A\|_M = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V$
  - Spaltensummen-Norm: $\|A\|_1 = \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|$
  - Zeilensummen-Norm: $\|A\|_\infty = \max_j \sum_{j=1} |a_{jk}|$
  - Spektral-Norm: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$
- Konsistenz: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
- Verträglichkeit: $\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V$
- Kondition: $\kappa(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \geq 1$
- Die Operator-Norm ist konsistent und mit der entsprechenden Vektornorm verträglich
  - Nach Def.: $\|A\|_M \geq \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} \Longrightarrow \|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V$
  - $\|AB\|_M = \max_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|_V}{\|x\|_V} \leq \|A\|_M \max_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_V}{\|x\|_V} = \|A\|_M \cdot \|B\|_M$
- Fehler Δb auf der rechten Seite eines LGS haben folgende Auswirkungen auf die Lösung:
  - $\|\Delta x\|_V \leq \left\|A^{-1}\right\|_M \cdot \|\Delta b\|_V$
  - $\frac{\|\Delta x\|_V}{\|x\|_V} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|_V}{\|B\|_V}$

LU-Zerlegung

- Sei A invertierbar. Dann existiert $P \in \Pi_n$, sodass $PA = LU$ mit L untere bzw. U obere Dreiecksmatrix.
  - $Ax = b \Longleftrightarrow PAx = Pb \Longleftrightarrow LUx = Pb$
  - $Ly = Pb, Ux = y$
  - Die LU-Zerlegung ist eindeutig.
- Initialisiere $p_i = i, L = 0, U = A$
- Für i:
  - Sei $j \geq i$ die Zeile mit betragsmäßig größtem Wert in Spalte i. Vertausche Zeilen u_i und u_j, sowie l_i und l_j, sowie p_i und p_j
  - für $j > i$:
    - Merke $l_{ji} = \frac{u_{ji}}{a_{ii}}$
    - Addiere das $\frac{-u_{ji}}{u_{ii}}$-fache der i-ten Zeile auf die j-te Zeile, sodass $u_{ji} = 0$

Cholesky-Zerlegung

- Sei A symmetrisch und positiv definit. Dann ist $A = GG^T$ mit G untere Dreiecksmatrix.
  - $Ax = b \Longleftrightarrow GG^T x = b$
  - $Gy = b, G^T x = y$
- Berechnung trivial

Kapitel 3

Banach'scher Fixpunktsatz und Spektralradius

- F heißt Kontraktion, wenn Lipschitz-Konstante $L < 1$ existiert, sodass $\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$

- Ist F eine Kontraktion von $D \to D$, hat F genau einen Fixpunkt x^* und die Folge $x^{(j+1)} = F\left(x^{(j)}\right)$ konvergiert gegen x^*.
- $Ax = b \Longleftrightarrow x$ ist Fixpunkt von $F(x) = B^{-1}b + \left(I - B^{-1}A\right)x$
  - F ist Kontraktion, wenn $\left\|I - B^{-1}A\right\| < 1$
  - Iterationsvorschrift: $Bx^{(j+1)} = b - (A - B)x^{(j)}$
- Spektralradius: $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in S(A)} |\lambda|$
  - $\rho(A) = \limsup\limits_{j \to \infty} \left\|A^j\right\|_\infty^{\frac{1}{j}} \leq \|A\|_\infty$
  - $\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N} : \left\|A^j\right\|_\infty^{\frac{1}{j}} \leq \rho(A) + \varepsilon$ für alle $j \geq j_0$
  - F(x) konvergiert $\Longleftrightarrow \rho\left(I - B^{-1}A\right) < 1$

Indirekte Verfahren

- Sei $A + L + D + U$.
- Jacobi-Verfahren: $B = D$
  - konvergiert, falls A diagonaldominant ist
- Gauß-Seidel-Verfahren: $B = L + D$
  - konvergiert falls A diagonaldominant oder symmetrisch ist
- Relaxationsverfahren: $B(\omega) = L + \frac{1}{\omega}D, \omega \in (0, 2)$
- CG-Verfahren: Sei A symmetrisch und positiv definit.
  - Idee: Sei $F(x) = \frac{1}{2}(Ax - b)^T A^{-1}(Ax - b)$. Da A^{-1} auch positiv definit ist, ist $F(x) \geq 0$ mit $F(x) = 0 \Longleftrightarrow Ax = b$. Wir suchen globales Minimum von F.
  - Sei $f(t) = F(x + ty)$. f ist bei $t = \frac{y^T(b-Ax)}{y^T Ay}$ minimal. Also Iterationsvorschrift: $x^{(j+1)} = x^{(j)} + \frac{r_j^T y}{y^T Ay} y$.
  - r_j ist orthogonal zu $\operatorname{span}\left(y_1, ..., y_j\right)$.
  - Der Vektor $y_{j+1} = r_j - \frac{y_j^T Ar_j}{y_j^T Ay_j} y_j$ ist A-konjugiert zu allen $y_k, k \leq j$. Damit ist nach n Schritten $\operatorname{span}(y_1, ..., y_n) = \mathbb{R}^n$.
  - Konvergenz nach n Schritten zur exakten Lösung

Kapitel 4

Normalengleichung

- lineares Ausgleichsproblem: $\arg\min\limits_{x \in \mathbb{R}} \|b - Ax\|_2$
  - Gauß'sche Normalengleichung gibt Lösung: $A^T Ax = A^T b$ (aber numerisch instabil, da $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$)

QR-Zerlegung

- Sei Q orthogonal. Dann gilt $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ sowie $\|QA\|_F = \|A\|_F$.
- Householder-Matrix: $H = I - 2uu^T$ mit $\|u\|_2 = 1$ (Spiegelung an $\operatorname{span}(u)^\perp$), symmetrisch und orthogonal
- Ziel: Bestimme H, sodass $Ha = ce_1$. Lösung: $H = I - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T$ mit $v = a + \operatorname{sgn}(a_1)\|A\|_2 e_1$
- Für i:
  - Berechne H_i, das das Problem mit a_1 löst
  - Setze $A = (H_i A)[1 :][1 :]$
- $R = H_{n-1} \cdot ... \cdot H_1 A, Q = H_1^T \cdot ... \cdot H_{n-1}^T$
- Lösung des Ausgleichsproblem: $\min \|Ax - b\|_2 = \min \|QRx - b\|_2 = \min \left\|Q^T(QRx - b)\right\|_2 = \min \left\|Rx - Q^T b\right\|_2$, löse alo $Rx = Q^T b$

Singulärwertzerlegung

- $A = U\Sigma V^T$, mit v_i die orthonormale Eigenvektorbasis von $A^T A$, $\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_i}$ die entsprechenden Eigenwerte absteigend sortiert, $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ ONB von $\operatorname{img}(A)$, ergänzt zu ONB von $\mathbb{R}^m$.
  - $A = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i u_i v_i^T$
- Moore-Penrose Pseudoinverse: $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ mit $\Sigma^+ = \frac{1}{\Sigma}$
  - $A^+ = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T$
  - $AA^+A = A, A^+AA^+ = A^+, (AA^+) = AA^+, (A^+A)^T = A^+A$
  - A^+b löst das Ausgleichsproblem
  - AA^+ ist die orthogonale Projektion auf $\operatorname{img}(A)$
  - A^+A ist die orthogonale Projektion auf $\ker^{\perp(A)}$

Kapitel 5

Vektoriteration

- direkte Vektoriteration: Sei A diagonalisierbar. Dann konvergiert $x_{k+1} = A\widetilde{x_k}, \widetilde{x_k} = \frac{x_k}{\|x_k\|}$ gegen einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_1, wenn x_k nicht im Unterraum zu $\lambda_2, ..., \lambda_n$ ist.
  - Rayleigh-Quotient: Ist $x = y_i + \varepsilon r$ eine Eigenvektor-Näherung mit $\|y_i\|_2 = 1, \|r\|_2 = 1, r \perp y_i$, ist $\rho = \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_i + \varepsilon^2 c$ eine Eigenwert-Näherung
- inverse Vektoriteration: Sei $|\tilde{\lambda} - \lambda_i| < |\tilde{\lambda} - \lambda_j|$ für alle $j \neq i$ und λ_i einfacher Eigenwert von A. Dann ist $\frac{1}{\lambda_i - \tilde{\lambda}}$ der betr. größte Eigenwert von $\left(A - \tilde{\lambda} I\right)^{-1}$. Wende also direkte Vektoriteration auf $\left(A - \tilde{\lambda} I\right)^{-1}$ an, um λ_i zu finden.
  - Iterationsvorschrift: $\left(A - \tilde{\lambda} I\right) x_{k+1} = x_k$, löse mit LU-Zerlegung

Eigenwerteinschließungen

- Gerschgorin-Kreis: $K_{i(A)} = \left\{ z : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}$
  - $S(A) \subset \left(\bigcup_i K_{i(A)}\right) \cap \left(\bigcup_i K_{i(A^T)}\right)$
  - Folgerung: diagonaldominante Matrizen sind invertierbar
  - Ein Gerschgorin-Kreis, der disjunkt zu allen anderen Gerschgorin-Kreisen ist, enthält genau einen Eigenwert.
- Wertebereich: $W(A) = \{x^T A x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \|x\|_2 = 1\}$
  - $W(A)$ ist zusammenhängend. Ist A symmetrisch, ist $W(A) = [\lambda_n, \lambda_1]$. Ist A schiefsymmetrisch, ist $W(A) = [i\lambda_n, i\lambda_1]$.
- Satz von Benedixson: Da $A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$, ist $S(A) \subset W\left(\frac{A + A^T}{2}\right) + W\left(\frac{A - A^T}{2}\right)$
- Eigenwertberechnung mittels QR-Zerlegung: $A_0 = A, A_k = Q_k R_k, A_{k+1} = R_k Q_k$. A_k konvergiert gegen eine obere Dreiecksmatrix, die ähnlich ist zu allen anderen A_k.

Kapitel 6

Konvergenzordnung und Fehlerabschätzung

- a-priori-Fehlerabschätzung: Sei L die Lipschitz-Konstante und x^* der Fixpunkt der Kontraktion F. Dann gilt $\|x^* - x_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$.
- a-posteriori-Fehlerabschätzung: $\|x^* - x_k\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$
- Konvergenzordnung p: $\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^p} < K$ (für $p = 1$ muss $K < 1$ gelten)
  - lineare Konvergenz falls $|F'(x^*)| < 1$: $\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = F'(x^*)$
  - quadratische Konvergenz: Falls $F'(x^*) = 0$, gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{1}{2} F''(x^*)$

Newton-Verfahren

- findet Nullstelle von f. Iterationsvorschrift: $x_{k+1} = F(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Bedingungen:
  - $f'(x) \neq 0$
  - $F : [a, b] \to [a, b]$ (Fixpunkt)
  - $|F'(x)| = \frac{|f(x) f''(x)|}{|f'(x)|^2} \leq L < 1$ (Kontraktion)
- Beweis der Konvergenzordnung:
  - Satz von Taylor mit $n = 2$ bei x_k: $0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k + \theta(x^* - x_k))(x^* - x_k)^2$
  - $\Longleftrightarrow \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (x^* - x_k) = -\frac{1}{2} f''(x_k + \theta(x^* - x_k)) \frac{(x^* - x_k)^2}{f'(x_k)}$
  - $\Longleftrightarrow \lim\limits_{k \to \infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^2} = \frac{1}{2} \mid \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \mid < \infty$

Andere Verfahren

- Intervallschachtelung: (binary search), lineare Konvergenz
- Regula falsi: Sei $I_k = [l, r]$ und o.B.d.A. $f(l) < 0, f(r) > 0$. Iterationsvorschrift: $x_{k+1} = \frac{l f(r) - r f(l)}{f(r) - f(l)}$
  - Falls $f(x_{k+1}) < 0$, setze $I_{k+1} = [x_{k+1}, r]$
  - Sonst setze $I_{k+1} = [l, x_{k+1}]$
- Sekantenmethode: $x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$, superlineare Konvergenz ($p = \varphi$)