

Numerik 1

- Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

Kapitel 2

Matrixnormen

- Frobenius-Norm: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2}$
- Operator-Norm: $\|A\|_M = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V$
 - Spaltensummen-Norm: $\|A\|_1 = \max_k \sum_{j=1}^n |a_{jk}|$
 - Zeilensummen-Norm: $\|A\|_\infty = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$
 - Spektral-Norm: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$
- Konsistenz: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
- Verträglichkeit: $\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V$
- Kondition: $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$
- Die Operator-Norm ist konsistent und mit der entsprechenden Vektornorm verträglich
 - Nach Def.: $\|A\|_M \geq \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} \implies \|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V$
 - $\|AB\|_M = \max_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_V}{\|x\|_V} \leq \|A\|_M \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_V}{\|x\|_V} = \|A\|_M \cdot \|B\|_M$
- Fehler Δb auf der rechten Seite eines LGS haben folgende Auswirkungen auf die Lösung:
 - $\|\Delta x\|_V \leq \|A^{-1}\|_M \cdot \|\Delta b\|_V$
 - $\frac{\|\Delta x\|_V}{\|x\|_V} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|_V}{\|B\|_V}$

LU-Zerlegung

- Sei A invertierbar. Dann existiert $P \in \Pi_n$, sodass $PA = LU$ mit L untere bzw. U obere Dreiecksmatrix.
 - $Ax = b \iff PAx = Pb \iff LUx = Pb$
 - $Ly = Pb, Ux = y$
 - Die LU-Zerlegung ist eindeutig.
- Initialisiere $p_i = i, L = 0, U = A$
- Für i :
 - Sei $j \geq i$ die Zeile mit betragsmäßig größtem Wert in Spalte i . Vertausche Zeilen u_i und u_j , sowie l_i und l_j , sowie p_i und p_j
 - für $j > i$:
 - Merke $l_{ji} = \frac{u_{ji}}{u_{ii}}$
 - Addiere das $\frac{u_{ji}}{u_{ii}}$ -fache der i -ten Zeile auf die j -te Zeile, sodass $u_{ji} = 0$

Cholesky-Zerlegung

- Sei A symmetrisch und positiv definit. Dann ist $A = GG^T$ mit G untere Dreiecksmatrix.
 - $Ax = b \iff GG^T x = b$
 - $Gy = b, G^T x = y$
- Berechnung trivial

Kapitel 3

Banach'scher Fixpunktsatz und Spektralradius

- F heißt Kontraktion, wenn Lipschitz-Konstante $L < 1$ existiert, sodass $\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$

- Ist F eine Kontraktion von $D \rightarrow D$, hat F genau einen Fixpunkt x^* und die Folge $x^{(j+1)} = F(x^{(j)})$ konvergiert gegen x^* .
- $Ax = b \iff x$ ist Fixpunkt von $F(x) = B^{-1}b + (I - B^{-1}A)x$
 - F ist Kontraktion, wenn $\|I - B^{-1}A\| < 1$
 - Iterationsvorschrift: $Bx^{(j+1)} = b - (A - B)x^{(j)}$
- Spektralradius: $\rho(A) = \max_{\lambda \in S(A)} |\lambda|$
 - $\rho(A) = \limsup_{j \rightarrow \infty} \|A^j\|_{\infty}^{\frac{1}{j}} \leq \|A\|_{\infty}$
 - $\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N} : \|A^j\|_{\infty}^{\frac{1}{j}} \leq \rho(A) + \varepsilon$ für alle $j \geq j_0$
 - $F(x)$ konvergiert $\iff \rho(I - B^{-1}A) < 1$

Indirekte Verfahren

- Sei $A = L + D + U$.
- Jacobi-Verfahren: $B = D$
 - konvergiert, falls A diagonaldominant ist
- Gauß-Seidel-Verfahren: $B = L + D$
 - konvergiert falls A diagonaldominant oder symmetrisch ist
- Relaxationsverfahren: $B(\omega) = L + \frac{1}{\omega}D, \omega \in (0, 2)$
- CG-Verfahren: Sei A symmetrisch und positiv definit.
 - Idee: Sei $F(x) = \frac{1}{2}(Ax - b)^T A^{-1}(Ax - b)$. Da A^{-1} auch positiv definit ist, ist $F(x) \geq 0$ mit $F(x) = 0 \iff Ax = b$. Wir suchen globales Minimum von F .
 - Sei $f(t) = F(x + ty)$. f ist bei $t = \frac{y^T(b - Ax)}{y^T Ay}$ minimal. Also Iterationsvorschrift: $x^{(j+1)} = x^{(j)} + \frac{r_j^T y}{y^T Ay} y$.
 - r_j ist orthogonal zu $\text{span}(y_1, \dots, y_j)$.
 - Der Vektor $y_{j+1} = r_j - \frac{y_j^T A r_j}{y_j^T A y_j} y_j$ ist A -konjugiert zu allen $y_k, k \leq j$. Damit ist nach n Schritten $\text{span}(y_1, \dots, y_n) = \mathbb{R}^n$.
 - Konvergenz nach n Schritten zur exakten Lösung

Kapitel 4

Normalengleichung

- lineares Ausgleichsproblem: $\arg \min_{x \in \mathbb{R}} \|b - Ax\|_2$
 - Gauß'sche Normalengleichung gibt Lösung: $A^T Ax = A^T b$ (aber numerisch instabil, da $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$)

QR-Zerlegung

- Sei Q orthogonal. Dann gilt $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ sowie $\|QA\|_F = \|A\|_F$.
- Householder-Matrix: $H = I - 2uu^T$ mit $\|u\|_2 = 1$ (Spiegelung an $\text{span}(u)^\perp$), symmetrisch und orthogonal
- Ziel: Bestimme H , sodass $Ha = ce_1$. Lösung: $H = I - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T$ mit $v = a + \text{sgn}(a_1)\|a\|_2 e_1$
- Für i :
 - Berechne H_i , das das Problem mit a_1 löst
 - Setze $A = (H_i A)[1 : \cdot][1 : \cdot]$
- $R = H_{n-1} \cdot \dots \cdot H_1 A, Q = H_1^T \cdot \dots \cdot H_{n-1}^T$
- Lösung des Ausgleichsproblem: $\min \|Ax - b\|_2 = \min \|QRx - b\|_2 = \min \|Q^T(QRx - b)\|_2 = \min \|Rx - Q^T b\|_2$, löse also $Rx = Q^T b$

Singulärwertzerlegung

- $A = U\Sigma V^T$, mit v_i die orthonormale Eigenvektorbasis von $A^T A$, $\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_i}$ die entsprechenden Eigenwerte absteigend sortiert, $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ ONB von $\text{img}(A)$, ergänzt zu ONB von $\mathbb{R}^m$.
 - $A = \sum_{i=1}^p \sigma_i u_i v_i^T$
- Moore-Penrose Pseudoinverse: $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ mit $\Sigma^+ = \frac{1}{\Sigma}$
 - $A^+ = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T$
 - $AA^+A = A, A^+AA^+ = A^+, (AA^+)^T = AA^+, (A^+A)^T = A^+A$
 - A^+b löst das Ausgleichsproblem
 - AA^+ ist die orthogonale Projektion auf $\text{img}(A)$
 - A^+A ist die orthogonale Projektion auf $\ker^\perp(A)$

Kapitel 5

Vektoriteration

- direkte Vektoriteration: Sei A diagonalisierbar. Dann konvergiert $x_{k+1} = A\tilde{x}_k, \tilde{x}_k = \frac{x_k}{\|x_k\|}$ gegen einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 , wenn x_k nicht im Unterraum zu $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ ist.
 - Rayleigh-Quotient: Ist $x = y_i + \varepsilon r$ eine Eigenvektor-Näherung mit $\|y_i\|_2 = 1, \|r\|_2 = 1, r \perp y_i$, ist $\rho = \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_i + \varepsilon^2 c$ eine Eigenwert-Näherung
- inverse Vektoriteration: Sei $|\tilde{\lambda} - \lambda_i| < |\tilde{\lambda} - \lambda_j|$ für alle $j \neq i$ und λ_i einfacher Eigenwert von A . Dann ist $\frac{1}{\lambda_i - \tilde{\lambda}}$ der betr. größte Eigenwert von $(A - \tilde{\lambda}I)^{-1}$. Wende also direkte Vektoriteration auf $(A - \tilde{\lambda}I)^{-1}$ an, um λ_i zu finden.
 - Iterationsvorschrift: $(A - \tilde{\lambda}I)x_{k+1} = x_k$, löse mit LU-Zerlegung

Eigenwerteinschließungen

- Gerschgorin-Kreis: $K_{i(A)} = \left\{ z : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}$
 - $S(A) \subset \left(\bigcup_i K_{i(A)} \right) \cap \left(\bigcup_i K_{i(A^T)} \right)$
 - Folgerung: diagonaldominante Matrizen sind invertierbar
 - Ein Gerschgorin-Kreis, der disjunkt zu allen anderen Gerschgorin-Kreisen ist, enthält genau einen Eigenwert.
- Wertebereich: $W(A) = \{x^T A x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \|x\|_2 = 1\}$
 - $W(A)$ ist zusammenhängend. Ist A symmetrisch, ist $W(A) = [\lambda_n, \lambda_1]$. Ist A schiefssymmetrisch, ist $W(A) = [i\lambda_n, i\lambda_1]$.
- Satz von Benedixson: Da $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$, ist $S(A) \subset W\left(\frac{A+A^T}{2}\right) + W\left(\frac{A-A^T}{2}\right)$
- Eigenwertberechnung mittels QR-Zerlegung: $A_0 = A, A_k = Q_k R_k, A_{k+1} = R_k Q_k$. A_k konvergiert gegen eine obere Dreiecksmatrix, die ähnlich ist zu allen anderen A_k .

Kapitel 6

Konvergenzordnung und Fehlerabschätzung

- a-priori-Fehlerabschätzung: Sei L die Lipschitz-Konstante und x^* der Fixpunkt der Kontraktion F . Dann gilt $\|x^* - x_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$.
- a-posteriori-Fehlerabschätzung: $\|x^* - x_k\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$
- Konvergenzordnung p : $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^p} < K$ (für $p = 1$ muss $K < 1$ gelten)
 - lineare Konvergenz falls $|F'(x^*)| < 1$: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = F'(x^*)$
 - quadratische Konvergenz: Falls $F'(x^*) = 0$, gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{1}{2} F''(x^*)$

Newton-Verfahren

- findet Nullstelle von f . Iterationsvorschrift: $x_{k+1} = F(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Bedingungen:
 - $f'(x) \neq 0$
 - $F: [a, b] \rightarrow [a, b]$ (Fixpunkt)
 - $|F'(x)| = \frac{|f(x)f''(x)|}{|f'(x)|^2} \leq L < 1$ (Kontraktion)
- Beweis der Konvergenzordnung:
 - Satz von Taylor mit $n = 2$ bei x_k : $0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k + \theta(x^* - x_k))(x^* - x_k)^2$
 - $\Leftrightarrow \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (x^* - x_k) = -\frac{1}{2}f''(x_k + \theta(x^* - x_k))\frac{(x^* - x_k)^2}{f'(x_k)}$
 - $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right| < \infty$

Andere Verfahren

- Intervallschachtelung: (binary search), lineare Konvergenz
- Regula falsi: Sei $I_k = [l, r]$ und o.B.d.A. $f(l) < 0, f(r) > 0$. Iterationsvorschrift: $x_{k+1} = \frac{l f(r) - r f(l)}{f(r) - f(l)}$
 - Falls $f(x_{k+1}) < 0$, setze $I_{k+1} = [x_{k+1}, r]$
 - Sonst setze $I_{k+1} = [l, x_{k+1}]$
- Sekantenmethode: $x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$, superlineare Konvergenz ($p = \varphi$)